Explicaciones definitivas

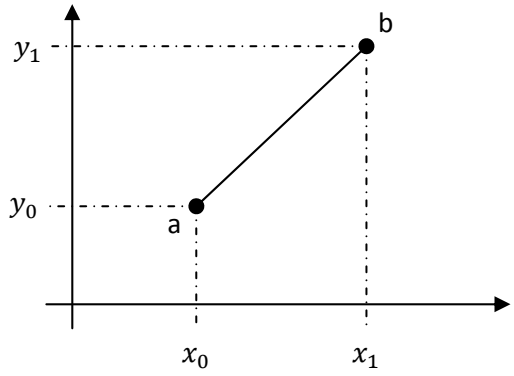
Derivadas

El cálculo infinitesimal está vinculado históricamente al problema de la tangente a una curva en un punto dado. Fue estudiado por Newton y Leibniz. Hay una historia interesante ahí. Ya la incorporaremos.

Vamos a hacer un breve, pero exhaustivo, resumen del modo en que se razonó para llegar a la conceptualización de la derivada o diferenciación.

Todo surge en torno al concepto de pendiente de una recta.

Supongamos el siguiente gráfico:



En él tenemos definida la recta $\overline{ab}$ en un plano cartesiano. Ésta, está comprendida entre dos puntos definidos del siguiente modo:

$$a = (x_0, y_0)$$

$$b = (x_1, y_1)$$

La pendiente de una recta no es otra cosa que "la proporción en que 'y' va cambiando según cambie x" o lo que es lo mismo "la proporción en la que x e y cambian una respecto de otra". Así, por ejemplo, una recta de 45 º, a saber, la diagonal de un cuadrado, cambia con una ratio 1/1, es decir cuando x cambia 0,35, y cambia también 0,35…cambian exactamente lo mismo.

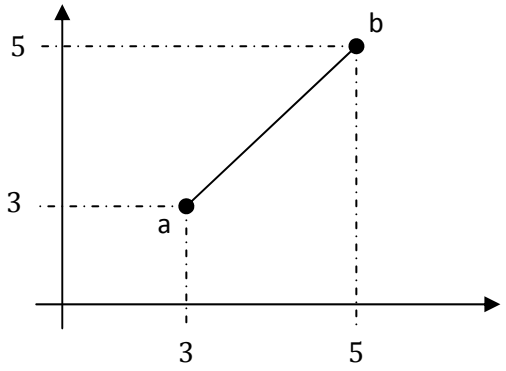
La fórmula de la pendiente es, pues:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Donde Δ es, "diferencia de …". Naturalmente, para obtener la pendiente de una recta, necesitamos dos puntos de referencia pues, si sólo tuviéramos uno, ¿cómo vamos a establecer una recta? Para que exista una recta necesitamos dos puntos y, a través de ellos, podremos ver la proporción en que cambian estos puntos. En definitiva, podremos decir que la pendiente de una recta es igual a:

$$m = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Veamos un ejemplo en torno al gráfico que hemos propuesto:



En este caso, los puntos de la recta $\overline{ab}$ se definen como:

$$a = (3,3)$$

$$b = (5,5)$$

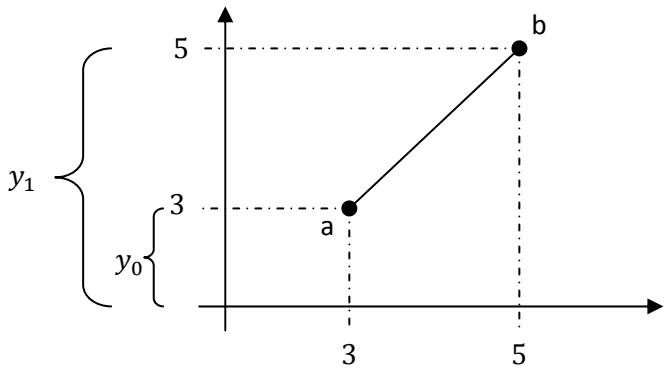
¿Cuál es el cambio que se produce desde (a) hasta (b)?

(aunque es obvio a simple vista, el objetivo de esta guía es presentar las cosas de manera que cualquiera pueda entenderlas por lo que seguiremos paso a paso de manera exhaustiva 'nivel hartible'… el objetivo es no tener que hacer ningún esfuerzo por entender lo que se recoja en estas 'explicaciones definitivas')

Retomemos la fórmula de la pendiente:

$$m = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sí, $y_1 - y_0$ y no $y_0 - y_1$ pues, téngase en cuenta que, "al total que llega a (b) desde 0, se le quita el fragmento que va desde 0 a (a) en cada eje cartesiano:



$Es\ obvio\ que\ a\ y_1\ se\ le\ resta\ y_0$

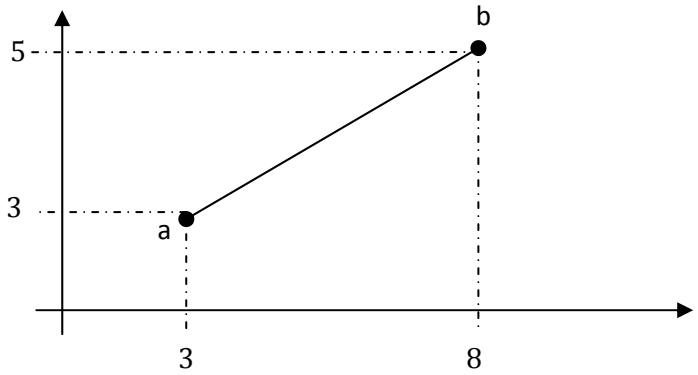
(Éstas son las típicas cosas disléxicas que tienen a pensarse por primera vez al revés)

Luego:

$$m = \frac{(5-3)}{(5-3)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{2} = 1$$

Esto quiere decir que el cambio que se produce en un eje de coordenadas es igual al cambio en el otro eje multiplicado por 1, a saber: exactamente igual.

Supongamos un ejemplo un poco menos simétrico:



Obviamente la proporción en que una coordenada cambia respecto de la otra ya no es perfectamente simétrica. Ahí se ha metido una proporción de tipo diferente, más 'rara'.

Veamos qué pasa al aplicar la fórmula:

$$m = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Luego:

$$m = \frac{(5-3)}{(8-3)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{5}$$

Esto quiere decir que x e y cambian según una proporción de 2/5. Es decir, según el ejemplo, cuando el punto a cambia su x en, por ejemplo, 3 unidades, y debe cambiar según la proporción 2/5. OJO, nos estamos refiriendo "**AL CAMBIO"**, no al punto fijo, no a la posición, sino al cambio (típica cosa disléxica también). Téngase en cuenta que la fórmula es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Muy importante: nos referimos al cambio, no al punto.

Así, siguiendo con el ejemplo, cuando (a) "se mueva hacia" (b), se produce un cambio en x de 5 puntos, que en y será un cambio proporcional según la regla 2/5, a saber: 'y' cambia 2/5 de lo que cambia x. Según la fórmula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Podremos decir que cuando el cambio de Δx sea una cantidad dada, entonces Δy será 2/5 de esa cantidad. Es decir:

$$(\Delta x)m = (\Delta y)$$

Es decir, cuando x cambia 5, y cambia 2:

$$5 \cdot \frac{2}{5} = (\Delta y)$$

$$2 = \Delta y$$

Ya tenemos **LOS CAMBIOS**. Ahora, sumamos esos cambios a los puntos de partida y obtendremos las coordenadas 'destino':

- El punto (a) tenía un punto de partida x =3 pero, por definición, le hemos impuesto un incremento de 5, luego la coordenada x resultante será $x_0 + \Delta x$, es decir: 3+5=8
- El punto (a) tenía, a su vez, un punto de partida y=3, pero el incremento de x según la ratio, aporta un cambio de la coordenada 'y' de 2, luego la coordenada resultante será $x_0 + \Delta x$, es decir: 3+2=5

Luego el punto (b), tras los cambios producidos desde (a) tendrá las siguientes coordenadas:

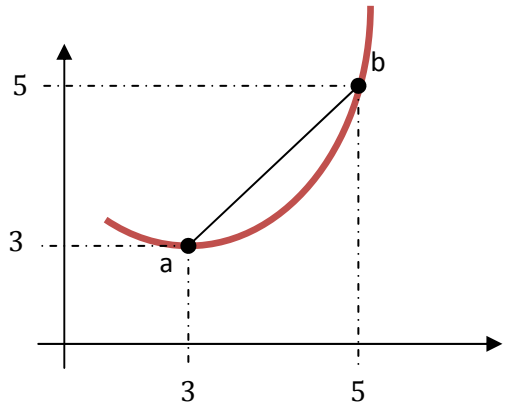
b=(8,5)

Creo que con esto se entiende bastante bien el concepto de pendiente.

Surgimiento de la DERIVADA.

Newton estaba estudiando el modo de resolver el problema de la tangente a una curva en un punto dado. No era difícil calcular la pendiente de una curva secante a una curva que la cortara en dos puntos dados (justo lo hemos visto anteriormente)…pero ¿y en un solo punto dado?

Bien, veamos cómo se calcula la pendiente de una **recta secante** a una curva que la corta en dos puntos (justo, justo lo que hemos hecho hasta ahora).

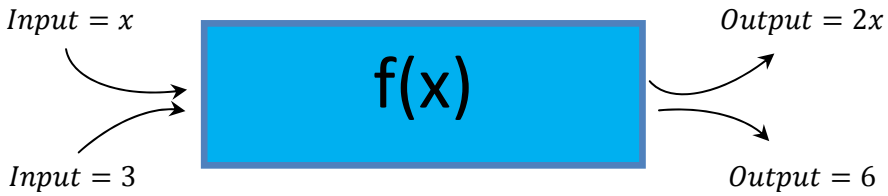


Como vemos, es exactamente el mismo caso que hemos visto hasta ahora: la pendiente entre dos puntos de una recta dada.

Ahora un pequeño inciso sobre qué es una función. Esto es muy simple. Una función es la relación que existe entre dos variables de manera que transforma un valor en otro. Por ejemplo:

$$f(x) = 2x$$

Quiere decir que (imaginemos una máquina):



Así, esto es muy importante, podemos decir que:

$$y = f(x), es\ decir,'\ y' es\ el\ resultado\ que\ aporta\ la\ función\ tras\ 'alimentarla'\ con\ x$$

Es decir, usando el ejemplo que nos traemos entre manos, podemos decir que el valor de y es:

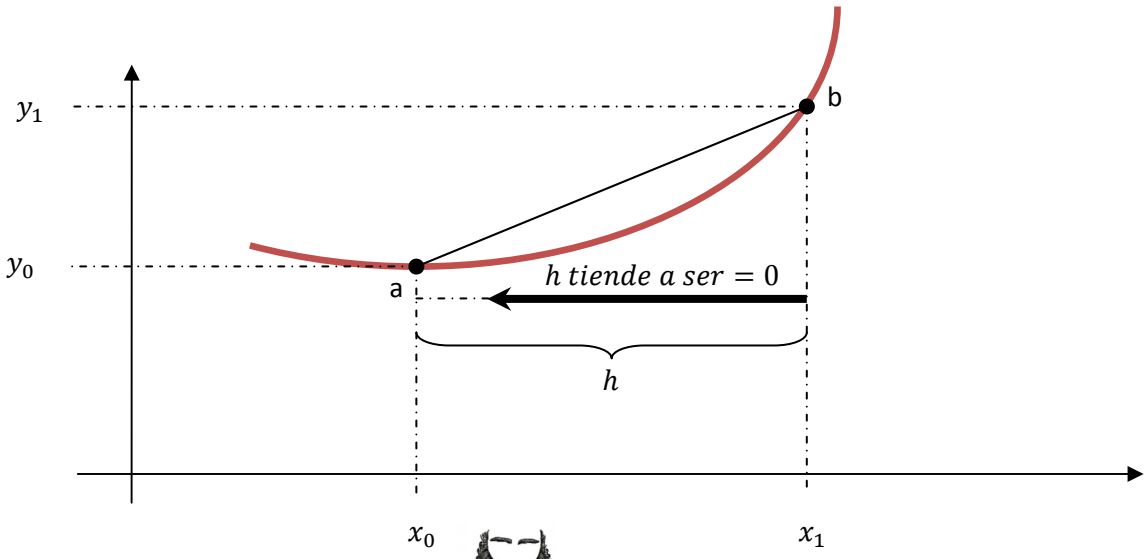
$$y = 2x$$

Ok. Esto es una función, en términos muy generales. Prosigamos.

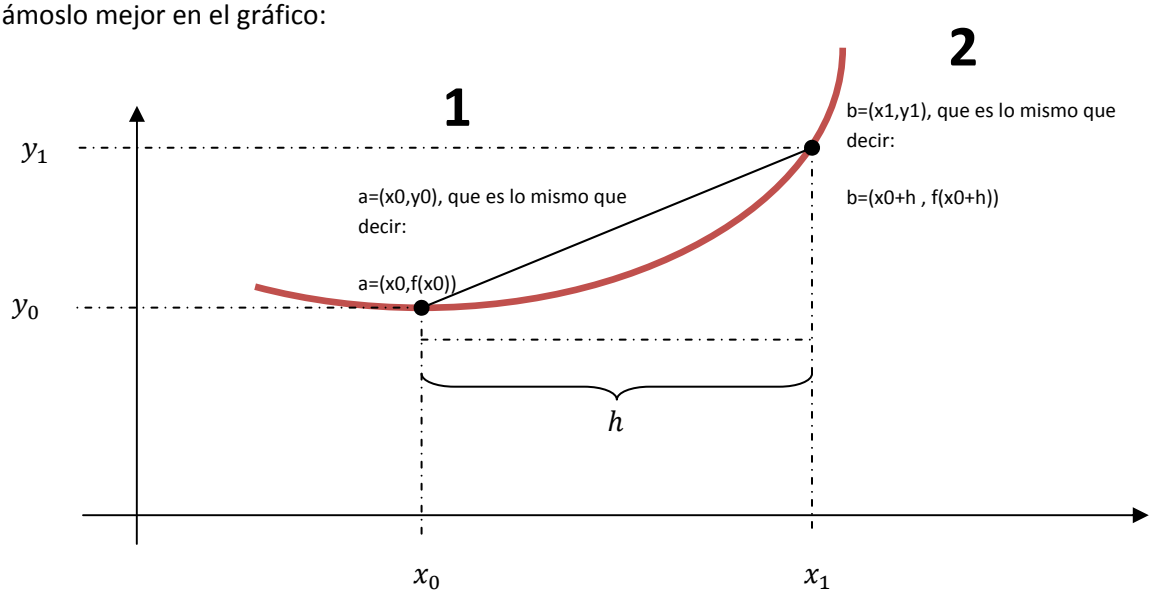
Decíamos que cualquiera podía calcular sin problemas la pendiente de una recta secante a una curva…pero ¿y la tangente?

Newton empezó a suponer que para calcular la pendiente de una tangente a una curva dada en un punto lo que tenía que hacer era acercar infinitamente los puntos (a) y (b), hasta que prácticamente se pudiera decir que es un solo punto, es decir, empezó a usar el concepto de límite.

Así empezó a razonar de esta manera, pensando en hacer que el incremento 'h' tendiera a ser 0 o, lo que es lo mismo, (b) tiene a ser casi casi =(a):



Definámoslo mejor en el gráfico:



Es obvio, teniendo en cuenta lo que acabamos de decir de las funciones, que:

1) Siendo las coordenadas de $a = (x_0, y_0)$, podremos decir que las coordenadas de a serán $((x_0), (el\ valor\ que\ tome\ la\ función\ cuando\ tiene\ input\ x_0))$, es decir:

$$a = (x_0, f(x_0))$$

(pues ya hemos dicho que y = f(x): 'lo que arroja la función cuando se le aporta el input x')

2) Igualmente, las coordenadas de $b = (x_1, y_1)$, donde sabemos (clarísimo si miramos el dibujo) que:

$$x_1 = x_0 + h$$

$$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$$

Luego:

$$b = (x_0 + h, f(x_0 + h))$$

Ahora ya tenemos las coordenadas definidas en función de x y su incremento h. Retomemos el concepto de pendiente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Tendríamos pues que, para el caso que estamos desarrollando:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - (x_0)}$$

Que es lo mismo que decir:

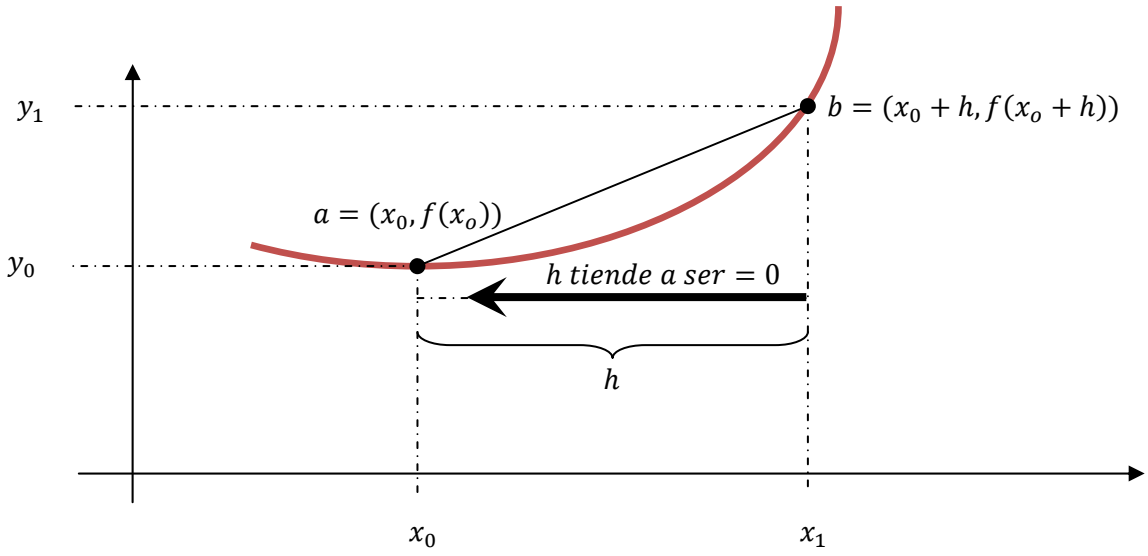
$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Y, esto, es el Cociente de Newton (IMPORTANTE).

Bien, pero recordemos que Newton quería hacer h lo más cercano a 0 posible, luego, finalmente el cociente de Newton se convierte en un límite cuando h->0. Esto es:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Pensémoslo mirando el gráfico otra vez. Bellamente simple:



Que es, precisamente, la definición formal de la derivada. Que, recordemos, es una pendiente.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Definición formal de derivada:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Veamos algo sobre la notación de Leibniz (más simple)

Hemos dicho que *h* tiende al cero, es decir, es muy cercana a 0. Es decir:

El numerador: $f(x_0 + h) - f(x_0)$ *será casi casi cero*

El denominador, por definición, también

Es decir, estamos calculando la ratio entre dos magnitudes muy pequeñas. Estamos calculando la ratio entre dos infinitesimales, entre **DOS DIFERENCIALES**.

Cuando integramos, estamos calculando la ratio entre:

$$m = \frac{Un\ cambio\ muy\ pequeño\ de\ f(x)}{Un\ cambio\ muy\ pequeño\ de\ x}$$

Podemos expresarlo así:

$$m = \frac{df(x)}{dx}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{dy}{dx}$$

Que no es sino decir que se van a realizar las operaciones necesarias para calcular el límite del producto de Newton cuando la variación de x (el input de nuestra función) es muy, muy pequeño, tendente a 0.

Vamos a ver cómo cambia el output de una función cuando el cambio del input es casi 0, es decir, vamos coger la función original y vamos a realizar cambios en ella suponiendo que el input cambia casi 0 (ojo, esto está expresado regular).

Esta notación es muy potente.

Sabemos que una función "recibe" números (inputs), tras procesarlos, emite otros números (output). Bien, la derivada hace lo mismo pero con funciones, trabaja en un tipo (nivel) superior. La derivada "recibe" funciones (inputs) y, tras procesarla, "emite" otras funciones.

El operador al modo de Leibniz nos permitirá, incluso, trabajar con las derivadas, aún sin mirar qué están haciendo. Por ejemplo, veamos algo con el operador de la derivada "segunda de", respecto a x:

$$\frac{d^2}{dx^2}$$

Supongamos ese operador en una función (no derivando nada, sólo el operador):

$$\frac{d^2}{dx^2} - 1 = \left(\frac{d}{dx} - 1\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} + 1\right)$$

(por la diferencia de cuadrados)

Apliquemos esto a una función:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right) \cdot f$$

$$\left(\frac{d}{dx} - 1\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} + 1\right) \cdot f$$

$$\left(\frac{d}{dx} - 1\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} f + f\right)$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} f + f\right) - \left(\frac{d}{dx} f + f\right)$$

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f + \frac{d}{dx} f\right) - \left(\frac{d}{dx} f + f\right)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f + \frac{d}{dx} f - \frac{d}{dx} f - f$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f - f$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right) \cdot f$$

En definitiva, la derivación no es sino una operación más que podemos usar sin tener que "mirar dentro".

Evaluemos una función según la definición formal de derivada.

$$y = x^2$$

Sabemos, por la definición de derivada, que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Sustituimos por nuestra función:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$$

(IMPORTANTE: el modo de sustituir es cambiar la x, DENTRO DE LA FUNCIÓN, por (x+h). Es decir, el cambio que hay que hacer es $(x + h)^2$ *y nunca* $x^2 + h$.)

Despejamos el cuadrado:

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - x^2}{h}$$

Seguimos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2xh}{h}$$

Siempre buscaremos evitar la indeterminación que nos provocaría tener la h en el denominador. Así, puesto que h está en todos los términos del numerador, podremos despejarla:

$$\lim_{h\to 0} h + 2x$$

Ahora podremos evaluar el límite sustituyendo h por un "casi 0", que nos da:

$$\lim_{h\to 0} h + 2x = 2x$$

Que es la función derivada de

$$y = x^2$$

Veamos algún ejemplo adicional.

Derivemos, según la definición, la siguiente función:

$$y = 8x^2 - 8x - 2$$

Así:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{8(x + h)^2 - 8(x + h) - 2 - (8x^2 - 8x - 2)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{8x^2+8h^2+16xh-8x-8h-2-8x^2+8x+2}{h}$$

Esto es:

$$\lim_{h\to 0}\frac{8h^2+16xh-8h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} 8h+16x-8 \rightarrow\ 16x-8$$

Veamos algún ejemplo adicional.

$$\sqrt{3x+7}$$

Allá vamos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)+7}-\sqrt{3x+7}}{h}$$

Caso de factorización: sabemos que $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b).\,Lo\ usamos$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{3(x+h)+7}-\sqrt{3x+7}\right)\cdot\left(\sqrt{3(x+h)+7}+\sqrt{3x+7}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{3(x+h)+7}+\sqrt{3x+7}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{3(x+h)+7}\right)^2-\left(\sqrt{3x+7}\right)^2}{h\cdot\left(\sqrt{3(x+h)+7}+\sqrt{3x+7}\right)}$$

Los cuadrados se van con las raíces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3(x+h)+7-(3x+7)}{h\cdot\left(\sqrt{3(x+h)+7}+\sqrt{3x+7}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+3h+7-3x+7}{h\cdot\left(\sqrt{3(x+h)+7}+\sqrt{3x+7}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3h}{h\cdot\left(\sqrt{3(x+h)+7}+\sqrt{3x+7}\right)}$$

Quitamos la h del multiplicando del denominador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{\left(\sqrt{3(x+h)+7}+\sqrt{3x+7}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{\left(\sqrt{3x+3h+7}+\sqrt{3x+7}\right)}$$

Podemos evaluar la h sin crear una indeterminación:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{3x+7}\right)}$$

$$\frac{3}{\left(2(\sqrt{3x+7})\right)}$$

Que es la derivada de la función propuesta al inicio del caso.

Veamos otro ejemplo adicional.

$$\frac{1}{3x+7}$$

Vamos allá:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3(x+h)+7}-\left(\frac{1}{3x+7}\right)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3x+3h+7}-\left(\frac{1}{3x+7}\right)}{h}$$

Vamos a presentarlo de una manera más intuitiva:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{3x+3h+7}-\left(\frac{1}{3x+7}\right)$$

Hagamos factor común:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(3x+7)-(3x+3h+7)}{(3x+3h+7)\cdot(3x+7)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{3x+7-3x-3h-7}{(3x+3h+7)\cdot(3x+7)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-3h}{(3x+3h+7)\cdot(3x+7)}$$

Podemos quitar el 1/h con el (-3h):

$$\lim_{h\to 0}\frac{-3}{(3x+3h+7)\cdot(3x+7)}$$

Evaluemos ahora el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{-3}{(3x+(\boldsymbol{3h}\cong\mathbf{0})+7)\cdot(3x+7)}$$

$$\frac{-3}{(3x+7)^2}$$

Que es la derivada de:

$$\frac{1}{3x+7}$$

Veamos un último ejemplo.

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Según la definición:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{h}$$

Hagamos factor común:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{h}$$

Ahora, en el numerador, buscaremos la diferencia de cuadrados:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}\cdot\frac{1}{h}$$

Ahora el numerador será a^2-b^2, por lo que se irán las raíces con los cuadrados:

$$\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{\left(\sqrt{x+h}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}\cdot\frac{1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-h}{\left(\sqrt{x+h}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}\cdot\frac{1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\left(\sqrt{x+h}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}$$

Evaluemos ya el límite haciéndolo prácticamente 0:

$$\frac{-1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$\frac{-1}{x\cdot\left(2\sqrt{x}\right)}$$

$$\frac{-1}{\left(2x\sqrt{x}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}=\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2x^{3/2}}}$$

Nota sobre el denominador: esto es como decir 2 veces la raíz de x · una raíz más, es decir:

$$x\sqrt{x}=\sqrt{x^2\cdot x}=\sqrt{x^3}$$

Explicaciones definitivas

Derivadas 2. Reglas para la derivación directa.

Estudiemos algunas implicaciones de las derivadas. Para ello vamos a fijarnos en algunas relaciones entre números que parecen curiosas y casuales y preguntémonos por la causa de esa aparente coincidencia casual.

En breve veremos las reglas para el cálculo abreviado de las derivadas (aunque con lo que ya sabemos podríamos calcular perfectamente esta siguiente derivada), pero adelantemos esta regla:

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ahora veamos una relación curiosa entre números, por ejemplo:

$$\sqrt{9999} \cong 99.995 \ldots$$

¿Cuál es la causa de esta "bonita" coincidencia? Estudiemos si con las derivadas podemos encontrar la relación que se manifiesta aquí:

$$\sqrt{10000} \cong 100$$

Podemos decir que:

$$\sqrt{10000 - 1} \cong 100 - 1 \cdot f'(10000)$$

Es decir la raíz cuadrada de 10000-1 es la raíz cuadrada de 10000 – (la cantidad que cambia x · la proporción en que cambia y).

Seamos un poco más claros: $\sqrt{10000 - 1}$ es muy aproximadamente igual a la raíz cuadrada de 10000 – (la pequeña parte que aporta el producto de la cantidad que se introduce como input a la función y la derivada de la función), es decir, la raíz de 10000 menos la cantidad proporcional que el input produce en el output, una vez transformado mediante la función que se esté aplicando (en este caso una raíz).

Lo voy a volver a exponer de manera muy simple:

Es la raíz cuadrada del "principal" – la parte proporcional a x que la ratio de la función aporta, a saber: f'(x). Recordemos que la derivada no es sino una pendiente, una ratio de variación de y frente al input de x cuyo resultado es la aplicación de la ratio.

Así el resultado es: la aplicación de la función al principal – la aplicación de la ratio recogida en la función a x, que nos dará el output proporcional.

Téngase en cuenta que no podemos hacer raíz de 10000 – raíz de 1. Eso es una salvajada, pues la propia relación de resta interna en el radicando también está sometida a la función raíz. Esto que he dicho es rarillo, pero a nada que se piense es claro. De manera que si aplico la función raíz al "nucleo", después, una vez fuera no puedo aplicar la raíz a la parte (el incremento o decrecimiento "h"), sino que tengo que buscar otro tipo de proporción en el "mundo de fuera" de la raíz. Justamente, la proporcionalidad de la derivada.

Así:

$$\sqrt{10000 - 1} \cong 100 - 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{10000}}$$

$$\sqrt{10000-1} \cong 100 - 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{10000}}$$

$$\sqrt{10000-1} \cong 100 - 1 \cdot 0.005$$

$$\sqrt{10000-1} \cong 99.995$$

$$\sqrt{9999} \cong 99.995$$

Que es lo que estábamos buscando.

Esto nos arroja esta ley que, como veremos, nos va a permitir deducir una serie de normas abreviadas para el cálculo de la derivada de una función sin tener que pasar el engorro de calcular el límite según el modelo de Newton. La ley es la siguiente:

$$\boldsymbol{f(x+h) \cong f(x) + h \cdot f'(x)}$$

Mediante esta ley, extraigamos la primera regla para la derivación simple (que nos permita calcular sin tener que calcular el límite del cociente de Newton).

La derivada de una constante.

Supongamos:

$$(1)\ g(x) = 2f(x)$$

Recordemos que (la ley antes presentada) que:

$$(2)\ f(x+h) \cong f(x) + h \cdot f'(x)$$

Podemos decir, por *(1)*, que (es obvio por sí mismo, pues es como si *x+h=y*…):

$$(3)\ g(x+h) = 2f(x+h)$$

Que es lo mismo que decir:

$$(4)\ g(x+h) = 2f(x) + 2 \cdot h \cdot f'(x)$$

Que podemos replantear como (usando *(1)* y *(4)*):

$$(5)\ g(x+h) = g(x) + 2hf'(x)$$

Ahora usemos la ley, pero aplicada íntegramente a *g(x)*, es decir:

$$(6)\ g(x+h) \cong g(x) + h \cdot g'(x)$$

De manera que comparando *(5)* y *(6)*, nos vemos obligados a aceptar que:

$$2hf'(x) = hg'(x)$$

$$\boldsymbol{g'(x) = 2f'(x)}$$

Que nos permite extraer una primera regla: la derivación de funciones multiplicadas por constantes:

$$Si\ g(x) = kf(x)\ es\ diferenciable\ en\ a, entonces:$$

$$\boldsymbol{g'(a) = k \cdot f'(a)}$$

$$En\ notación\ de\ Leibniz: \frac{d}{dx} f(x) = k \frac{d}{dx} f(x)$$

Un ejemplo simple (es obvio, pues la constante no está en función de x y, por tanto, cuando se derive en base a x no afecta en nada a la constante):

$$g(x) = 5f(x), donde\ f(x) = x^2$$

$$¿\, g'(x)?$$

$$g'(x) = 5 \cdot f'(x)$$

$$g'(x) = 5 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$g'(x) = 5 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - x^2}{h}$$

$$5 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh}{h}$$

$$5 \cdot \lim_{h \to 0} h + 2x$$

$$5 \cdot 2x$$

$$10x$$

La derivada de una potencia.

Estudiemos cómo evoluciona la siguiente función:

$$f(x) = x^2$$

Introduzcamos una modificación, un input, veamos cómo cambia el output y estudiemos esa relación (la pendiente, es decir, la derivada):

Ahora no se aportará *x*, sino que le añadiremos un infinitesimal, algo muy muy pequeño: le añadiremos *h*.

La función será:

$$f(x) = (x + h)^2$$

Hagamos un poco de álgebra:

$$f(x) = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

Es obvio que cuando el input cambia *h*, el output cambia $2xh + h^2$.

Es decir, la ratio de los cambios, es la siguiente:

$$m = \frac{\Delta dy}{\Delta dx} = \frac{cambio\ en\ el\ output}{cambio\ en\ el\ input} = \frac{2xh + h^2}{h}$$

Sabemos que h es realmente pequeño, luego algo muy pequeño multiplicado por algo muy pequeño, es infinitamente pequeño. Así nos podemos cargar la h^2.

Así, nos queda:

$$\frac{2xh}{h} = 2x$$

Que es la ratio de cambio cuando se aporta un valor infinitesimal, un diferencial *dx*.

(Podríamos haberla deducido perfectamente con la definición formal de la derivada, de hecho ya habremos visto en algún caso anterior dicha demostración).

Miremos algún 'bello' ejemplo:

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

Esto es absolutamente obvio. Recordemos por qué:

$$m = \frac{cambio\ en\ el\ output}{cambio\ en\ el\ input}$$

Pero es que estamos estudiando ¡cómo cambia x cuando cambia x! es decir, lo mismo!, por lo tanto, naturalmente, la ratio es 1.

La regla de la derivada de una potencia la podemos resumir del siguiente modo (siempre que x sea diferente a 0, naturalmente):

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

La derivada de una suma de funciones.

Esto es bastante simple y obvio si se piensa un poco. Recordemos que la derivada no es sino el estudio de cómo cambia un output al modificar mínimamente el input. Se estudia un cambio infinitesimal. La suma de ese cambio es por tanto, derivable por separado (ojo, que esta explicación igual no es muy buena…).

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)+g(x)\big) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Demostración: es bastante simple y no tengo ganas de ponerla aquí. Se puede buscar fácilmente y es tan obvia que no merece la pena gastar espacio.

La derivada de un producto de funciones.

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

La derivada de un cociente de funciones.

Regla nemotécnica: "las f(x)s circundan el signo" (ojo que el signo importa)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Esto se puede deducir empleando la regla de la derivada de un producto de funciones y la derivada la inversa de una función. OJO: NO ES LO MISMO LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN QUE LA FUNCIÓN INVERSA. Esto me estuvo liando durante un ratillo. Lo desarrollo.

a) La inversa de una función es lo siguiente:

$$Si\ f(x), la\ inversa\ de\ esa\ función\ es\ \frac{1}{f(x)}, es\ decir, f(x)^{-1}\ (el-1\ afecta\ al\ conjunto)$$

Es decir, la **inversa de una función**, es pasar esa función al denominador.

b) En cambio, la función inversa es:

$$Si\ f(x), la\ función\ inversa\ es\ f^{-1}(x)$$

Es decir, la **función inversa de otra función**, es aquella que "deshace" lo que la función original hace. Gráficamente es coger una gráfica y "darle la vuelta", invertirla… Como dibujarla de nuevo pero en la cara de atrás del folio y cambiando la 'y' por la 'x'.

Veamos un ejemplo. Supongamos la función:

$$f(x) = 2x - 7$$

Calcular la inversa es muy simple, despejamos la x de esta función:

$$\frac{7 + f(x)}{2} = x$$

Y ahora, como hemos dicho antes en el ejemplo del papel, reasignamos la 'x' y la 'y':

$$f(x) = \frac{7 + x}{2}$$

Que es la función inversa de la que originalmente teníamos. Es decir:

$$f(x) = 2x - 7 \qquad f^{-1}(x) = \frac{7+x}{2}$$

Otro ejemplo de función inversa:

$$f(x) = x^2 \qquad f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$$

Dicho esto, procedamos a resolver el límite cuando h->0 del cociente de newton para "LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN" (caso (a)) (recordemos que estamos demostrando la regla de la derivada de un cociente). Así, para una función 'original' f(x), su inversa (ojo, no su función inversa, que es otra cosa…ya no lo digo más…XD):

$$\frac{1}{f(x)}$$

Luego:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{(fx)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x+h)\cdot f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x) - f(x+h)}{h\cdot f(x+h)\cdot f(x)}$$

Multiplicamos por (-1) para invertir el numerador y acercarnos a la definición formal de la derivada:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{-1}{f(x+h)\cdot f(x)}$$

Que es lo mismo que decir:

$$f'(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-1}{f(x+h)\cdot f(x)}$$

Que, si resolvemos el límite:

$$f'(x)\cdot\frac{-1}{f(x)\cdot f(x)}=f'(x)\cdot\frac{-1}{f(x)^2}=\frac{-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{2}}}$$

Que a nada que hagamos una prueba veremos que, cruzándola con la regla del producto, coincide con la regla del cociente.

La regla de la cadena.

Pensemos, de partida en estos, términos:

Una función es algo a lo que se le "aporta" un input, lo "trastea" y genera un output. La derivada estudiaba el comportamiento de ese trasteo para una modificación el input infinitesimalmente pequeña.

Así tenemos, ahora, estudiaremos casos de una "función compuesta". Es decir, una función cuyo input sea el output de otra. Es decir:

$$h(x) = g(f(x))$$

Es decir, cuando aportemos un input (x), se producirá un resultado f(x) que será el input de g(f(x)) que, finalmente, aportará un output definitivo de la "colaboración" de las dos funciones.

Sin embargo, OJO, el modo de calcular esto no es: ***g'(f(x)) = g'(f'(x)). NO!.***

La regla de la cadena lo que dice es:

REGLA DE LA CADENA

$$\boldsymbol{h'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

ó

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx} g\big(f(x)\big) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

Veamos el tipo de relaciones que hay entre inputs/outputs en este caso y que explican el modo en que se plantea la Regla de la Cadena (R.C):

1) $\dfrac{cambio\ que\ se\ produce\ en\ f(x)}{cuando\ cambia\ x} = f'(x)$

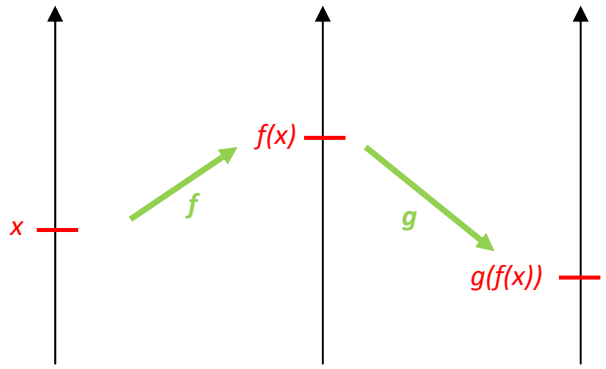
2) $\dfrac{cambio\ que\ se\ produce\ en\ g(f(x))}{cuando\ cambia\ f(x)} = g'\big(f(x)\big)$

3) $\dfrac{cambio\ que\ se\ produce\ en\ g(f(x))}{cuando\ cambia\ x} = \dfrac{d}{dx}\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$

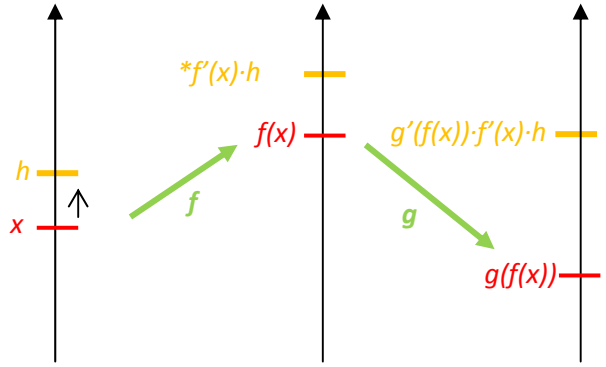
Es decir, (3) = (2)·(1). Es decir, como hemos visto, R.C.:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx} g\big(f(x)\big) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

Vamos a poner un ejemplo gráfico de este tipo de interrelaciones y como los cambios en un nivel provocan cambios en otro nivel. Supongamos tres escalas de medición y veamos cómo el cambio de 'x' en la primera escala se "transmite" a las siguientes escalas:



Ahora veamos qué pasaría si introdujéramos un cambio '*h*' en el "INPUT primario":



**Nota: recordemos que el cambio que se produce en f(x) es la ratio de cambio (la derivada, la pendiente, f'(x)) multiplicada por la "cuantía" de la modificación. Claramente: f'(x)·h. Igual para el siguiente paso.*

Se observa fácilmente que para una "cantidad de cambio" 'h', se produce una cantidad de cambio en '*g(f(x))*' de: *g'(f(x))·f'(x)·h. QUE ES LO QUE SE RECOGE EN LA* ***REGLA DE LA CADENA***.

NOTA RELEVANTE: Fallo con el que llevo un buen rato comiéndome el tarro. Estaba totalmente bloqueado diciendo que me parecía absurdo decir que: $g'(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Esto me tenía bloqueado porque me decía a mí mismo que como iba a ser igual a sí mismo pero multiplicado por otra cosa??!! Lo estaba leyendo mal. El modo correcto de leerlo es decir que si quiero derivar g(f(x)) entonces derivo "la cáscara": g'(f(x)) y después multiplico por lo de dentro · f'(x).

El error estaba en interpretar que d/dx g(f(x)) = g'(fx)). Lo primero se refiere al "conjunto", mientras que lo segundo se refiere sólo a la cáscara. OJO con ESTO!! Recuerdo que me liaba estando en física.

Es decir, en rojo lo que se deriva:

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

ANEXOS.

Derivación implícita (extensión de la R.C.)

Recordemos antes qué es eso de Implícita (y explícita).

En una ecuación cualquiera tendríamos una variable independiente (‘la que manda’, ‘la que va a variar a nuestro antojo’, por eso lo de *independiente*) y otra variable dependiente, por ejemplo ‘y’, que, como su nombre implica, variará en un función de los cambios de la anterior (‘x’).

El modo implícito en que se presenta una ecuación es el modo en que ambas variables están en un mismo ‘lado’ de la ecuación. Es decir, los elementos variables están a un lado, mientras que los elementos constantes están al otro. Por ejemplo:

$$x^2 + y^2 = 25$$

El modo explícito, sin embargo, es el modo en que se despeja la variable dependiente y se establece su verdadera relación con la variable independiente, la definición, propiamente dicha de ‘las tripas de la función’:

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

Que, siendo:

$$y = f(x)$$

Es lo mismo que decir:

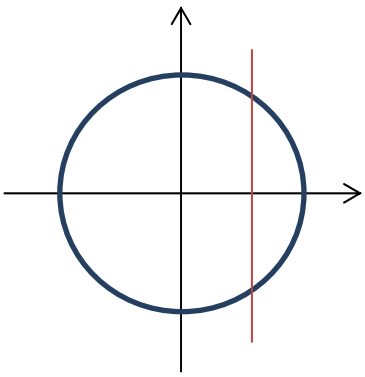
$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Que es a lo que estamos más acostumbrados hasta el momento.

Para presentar las funciones de una manera implícita, habremos de usar la R.C.

Sigamos avanzando en las aplicaciones de las derivadas. Llegados a este punto deberíamos ser capaces de derivar prácticamente cualquier función.

Supongamos el siguiente ejemplo:

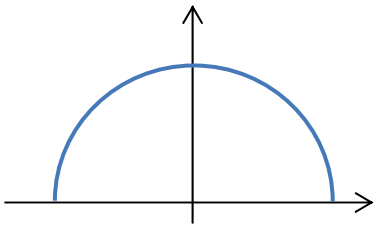


Esta es la representación gráfica de la siguiente formulación (digo ECUACIÓN y NO Función):

$$x^2 + y^2 = 25$$

NO ES UNA FUNCIÓN. Recordemos que una función sólo puede asignar un *f(x)* a un '*x*'. Es decir, debe haber una relación unívoca y, como se aprecia claramente en la línea roja, no es el caso, por lo que esto no es una función (*test de la línea vertical*). En definitiva, no es una función y, por lo tanto, no podemos derivarla (ojo, verificar que esto es así).

Sin embargo, sí que podríamos estudiarla como una función si lo hacemos por "segmentos", 'pasándola' al modo explícito, de manera que:



Que corresponde a la FUNCIÓN (ahora sí):

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

La cuestión es que tendríamos que eliminar los obstáculos segmentando el problema. Para ello lo que haríamos es hacer (para el caso $x^2 + y^2 = 25$), convertir 'y' en una función dependiente de x, es decir:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Pero, como hemos dicho, hagamos la transformación de 'y':

$$y = f(x)$$

Luego:

$$x^2 + f(x)^2 = 25$$

Ahora, derivemos (obviamente, deberemos emplear la **regla de la cadena** en el segundo sumando):

$$2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$$

De donde:

$$2f(x) \cdot f'(x) = -2x$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2f(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{f(x)}$$

Que es lo mismo que decir:

$$f'(x) = \frac{-x}{y}, es\ decir:$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{-x}{y}$$

Que, naturalmente, es una “ratio de cambio”.

El 'folium de Descartes'.

Descartes definió una curva algebraica mediante una ecuación y retó a Fermat a encontrar una tangente a cualquier punto de dicha gráfica (que tenía forma de hoja, por eso lo de 'folium'). Descartes no lo consiguió, pero Fermat sí.

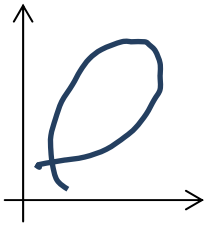
La forma algebraica, la ecuación, del folium era de este tipo:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Así, con una ecuación del tipo siguiente (por ejemplo para a=3):

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

Se obtenía una gráfica del siguiente tipo (más o menos…):



Naturalmente, vemos que no es la gráfica de una función, pues no cumple el 'test de la recta vertical' que vimos antes (se aprecia fácilmente). Sin embargo, también antes, conocimos el modo en que podemos resolver este tipo de situaciones mediante la derivación implícita pensando que 'y' está relacionada funcionalmente de alguna manera con 'x'. Así que aplicaremos la derivación implícita. Así, derivaremos implícitamente (uso de la R.C., y siempre en base a x, que es de la que queremos hacer depender todo!!):

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - \left(9y + 9x \cdot \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

- Nota sobre el (y^3): se hace por la R.C.

- Nota sobre el (9xy):

Es la derivada, respecto a x, de un producto, es decir:

$$\frac{d}{dx}(9x \cdot y)$$

La regla de la derivación de un producto:

$$\frac{d}{dx}(9x) \cdot (y) + (9x) \cdot \frac{d}{dx}(y)$$

$$(9) \cdot (y) + (9x) \cdot \frac{d}{dx}(y)$$

Recordemos que (9xy) está antecedido de un signo (-), luego:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - 9y - 9x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Que podemos reordenar como:

$$(3x^2 - 9y) + (3y^2 - 9x) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Que podremos reordenar como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2 - 9y)}{(3y^2 - 9x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2 + 9y)}{(3y^2 - 9x)}$$

Con lo que podríamos estudiar la pendiente en cualquier punto *(x,y)* del *folium* de Descartes.

Y usando el mismo procedimiento, podremos estudiar cualquier curva algebraica.

Como vemos el truco está en:

1) Tratar 'y' como una variable dependiente de x, es decir, una función de x (f(x)).

2) Usar la Regla de la Cadena.

Las particularidades del número e.

¿Es posible que exista una función tal que *f(x) = f'(x)=f''(x)…*?

Bueno, podríamos decir que eso pasa con *f(x) = 0*. Sería cierto…pero esto es una mierda de respuesta… no aporta nada. Hagamos algo más elaborado… Busquemos una función tal que *f(x) = f'(x)* y que sea diferente a 0.

Para ello, para evitar que la función sea 0, supongamos una función tal que, aportándole el valor 0, sea algo diferente de 0. Es decir, forzando a la función más simple posible *f(x)=x*, sea diferente de 0. Así, por ejemplo, tendríamos que hacer que, por ejemplo, *f(0)=1.*

La condición es, entonces que:

$$f(x) = f'(x)$$

De manera que (1):

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 1$$

¿Existe esa función? Sí.

$$f(x) = 1 + x$$

Naturalmente se cumple (1) (no lo vamos a desarrollar porque es obvio).

Pero recordemos que el proceso se debe poder seguir en las derivadas sucesivas, de manera que siempre nos dé = 1. Entonces, para que esto se pueda dar:

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, f'''(0) = 1, \dots$$

Tendremos que ir incrementando la función en cada caso del siguiente modo:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

Así, siempre, las derivadas sucesivas, para input 0, será 1 pues el "1" se irá, pero el siguiente miembro siempre será x, que se derivará en 1… Como no vamos a estar añadiendo términos hasta el infinito, introduciremos a nuestro buen amigo: el número e, que se base en el siguiente comportamiento:

$$e = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \cong 0.693$$

$$e = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \cong 1.099$$

Este comportamiento se resume en:

$$g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^h - 1}{h}$$

Es decir, según esto, vemos que:

$$g(2) \cong 0.693$$

$$g(3) \cong 1.099$$

$$\boldsymbol{g(e) = 1}$$

Es decir:

$$\boldsymbol{g(e) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1}$$

Donde:

$$\boldsymbol{e \cong 2.7183 \ldots}$$

Recordemos que estábamos buscando una función (para eso montamos toda la historia de ir añadiendo nuevos términos a la función) cuyas derivadas sucesivas sean siempre iguales a la función original. Así, hemos introducido el número e. Ahora supongamos la siguiente función:

$$f(x) = e^x$$

Donde:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

Tenemos factores comunes:

$$\lim_{h \to 0} e^x \frac{(e^h - 1)}{h}$$

Pero e^x es una constante que no se ve afectada por el límite y que podemos "sacar":

$$e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Pero, como hemos visto antes, por (2) podemos decir que:

$$f'(x) = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

Que, como vemos, cumple que *f(x) = f'(x)*.

e^x es una importante función que no podemos obtener como el resto de funciones polinómicas sino, sólo, mediante la aplicación de límites y procedimientos propios del cálculo.

Explicaciones definitivas

Derivadas 3. Funciones trascendentes.

Las funciones trascendentes son aquellas que no satisfacen una función polinómica cualquiera, es decir, son funciones que trascienden el Álgebra. Por ejemplo, una función en la que los exponentes sean, a su vez, polinomios. Trascienden el álgebra porque dicha función no puede ser expresada en términos de una secuencia finita de operaciones algebraicas de sumas, restas y extracción de raíces.

Ejemplo de funciones trascendentes:

- Las logarítmicas: $f(x) = \log_c x$
- Las trigonométricas: $f(x) = \sin x$
- Con exponente polinómico: $f(x) = x^{x-1}$

Funciones logarítmicas.

¿Qué es un logaritmo? Resumiendo mucho, el logaritmo surge ante la necesidad de computar de una manera más simple las potencias. Al principio puede parecer que complica la cosa pero, como veremos, lejos de eso, lo facilita muchísimo. Confiemos en que no se hacen esfuerzos en vano. Los logaritmos convierten productos en sumas y cocientes en restas. Los exponentes en productos, las raíces en cocientes. Facilita todo un grado.

Un logaritmo es el exponente al que hay que elevar una base para alcanzar un número "destino" determinado.

Por ejemplo, esto:

$$\log_3 243 = 5$$

Esto es: "el logaritmo en base 3 de 243 es 5, quiere decir que para alcanzar 243 hay que elevar 3 a '5'". Esto hay que tenerlo siempre en mente para no perder de vista de qué estamos hablando. Simple. Un logaritmo es una cosa muy simple.

Por ejemplo:

$$\log_2 4 = 2$$

$$\log_{10} 1000 = 3$$

La nomenclatura habitual es usar (**log), a secas, para referirse a los logaritmos en base 10** y **(ln) para referirse a los logaritmos neperianos, es decir, aquellos que están en base 'e'** (número 'e', que ya conocemos por algún anexo anterior).

Mediante algunos ejemplos vamos a ver algunas propiedades importantes de los logaritmos.

1- $\boldsymbol{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$

Por ejemplo:

$$\log_2 16 = 4$$

Esto lo podríamos poner como:

$$\log_2 4 \cdot 4 = \log_2 4 + \log_2 4 = 2 + 2 = 4$$

2- $\boldsymbol{\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x}$

Es obvio si revisamos el siguiente ejemplo:

$$\log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = (4) \cdot (1) = 4$$

2.1- $\boldsymbol{\log_a(x^{\frac{1}{n}}) = \log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a x}$

Esto es obvio por sí mismo según el caso (2).

3- $\boldsymbol{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$

Es una mezcla de las dos propiedades anteriores pues sabemos que:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x^1 \cdot y^{-1})$$

$$= 1 \cdot \log_a x + (-1) \cdot \log_a y$$

$$= \log_a x - \log_a y$$

Esto, como veremos, va a ayudar mucho a la hora de derivar funciones logarítmicas con exponentes muy elevados o, incluso, polinómicos. Importante, el logaritmo es la función inversa de la función exponencial: a^x.

El logaritmo neperiano, como podemos intuir, es un caso muy especial e importante de logaritmo, así:

$$\ln e = 1$$

Pues, naturalmente, ¿a cuánto hay que elevar 'e' para que nos de 'e'? a 1.

Hagamos algunos ejemplos de resolución de funciones logarítmicas.

$$\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y$$

$$\frac{1}{2}^{y} = 0.25; \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1^2}{2^2}\right) = \frac{1}{4} = 0.25, luego\ y = 2$$

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$$

$$3^{\frac{1}{2}y} = 3^{\frac{-4}{5}}, de\ donde\ despejando\ los\ exponentes: \frac{y}{2} = \frac{-4}{5}; y = \frac{-8}{5}$$

$$\log 0.001 = y; y = -3, es\ decir, \quad 'convertir' el\ 10\ (es\ base\ 10) en\ \frac{1}{1000} = 0.001$$

$$\ln \frac{1}{e^5} = y, donde\ y\ debe\ ser: e^{-5}$$

Controlando esto podemos abordar la regla de derivación directa de funciones polinómicas (de momento no desarrollamos la demostración, aunque podríamos hacerlo usando la definición de derivada, creo…).

Derivada de las funciones logarítmicas.

$$Siendo\ \boldsymbol{g(x) = \log_a f(x)}$$

$$Entonces\ \boldsymbol{g'(x) = \frac{1}{f(x) \cdot \ln a} \cdot f'(x)}$$

Esta fórmula sirve para todos los casos: TODOS. En el caso en que el logaritmo sea un logaritmo neperiano, naturalmente, en el denominador tendríamos $\boldsymbol{\ln e}$, que es 1, por lo que la fórmula nos quedaría del siguiente modo:

$$\boldsymbol{g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Veamos algunos ejemplos de derivación de funciones logarítmicas.

$$y = \log x^3$$

$$y' = \frac{3x^2}{x^3 \cdot \ln 10}$$

$$y = \ln 2x^2$$

$$y' = \frac{4x}{2x^2 \cdot \ln e} = \frac{4x}{2x^2} = \frac{4}{2x}$$

$$y = \log_3 x^4$$

$$y' = \frac{4x^3}{x^4 \cdot \ln 3}$$

Ojo con la **regla de la cadena** en las funciones logarítmicas. Si tenemos algo así como:

$$3 \cdot \log x^5 \, , no\ es\ la\ derivada\ de\ un\ producto, sino\ de\ una\ potencia$$

$$habría\ que\ derivar\ como: y = \ (\log x^5)^3$$

$$y' = 3 \cdot (\log x^5)^2 \cdot y'$$

$$= 3 \cdot (\log x^5)^2 \cdot \frac{5x^4}{x^5 \cdot \ln 10}$$

Veamos un ejemplo de lo potente que es la función logarítmica para resolver el cálculo de derivadas en funciones bastante complejas.

Supongamos una función del siguiente tipo:

$$f(x) = \frac{(1+x^2)^5 + (1+x^3)^8}{(1+x^4)^7}$$

Obviamente, podríamos usar la regla de la derivada del cociente de funciones… pero imaginad el follón… En cambio con la derivada de la función logarítmica la cosa se simplifica muchísimo. Así para:

$$y = \frac{(1+x^2)^5 + (1+x^3)^8}{(1+x^4)^7}$$

Pasemos ambos lados de la ecuación a ln:

$$\ln y = 5 \cdot \ln(1+x^2) + 8 \cdot \ln(1+x^3) - 7 \cdot \ln(1+x^4)$$

Ahora, derivemos en ambos lados de la ecuación (el primer término, naturalmente, por la derivada de un logaritmo…pero por qué neperiano?):

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{2x}{1+x^2} + 8 \cdot \frac{3x^2}{1+x^3} - 7 \cdot \frac{4x^3}{1+x^4}$$

Ahora pasamos la 1/y, pues queremos despejar $' \frac{d}{dx} y'$:

$$\frac{d}{dx}y = \left(5 \cdot \frac{2x}{1+x^2} + 8 \cdot \frac{3x^2}{1+x^3} - 7 \cdot \frac{4x^3}{1+x^4}\right) \cdot y$$

$$\frac{d}{dx}y = \left(5 \cdot \frac{2x}{1+x^2} + 8 \cdot \frac{3x^2}{1+x^3} - 7 \cdot \frac{4x^3}{1+x^4}\right) \cdot \frac{(1+x^2)^5 + (1+x^3)^8}{(1+x^4)^7}$$

Sé que no parece muy simple…pero creedme, del otro modo era mucho peor….

Vamos a ver otro ejemplo interesante, para una función 'rara'.

$$y = x^{\sqrt{2}}$$

El modo más fácil es usar la derivación logarítmica. Para ello:

'Pasamos a log ambos lados de la ecuación'

$$\log y = \log x^{\sqrt{2}}$$

Sabemos que, por las propiedades de los logaritmos, podemos decir que:

$$\log y = \sqrt{2} \cdot \log x$$

Ahora derivamos a ambos lados de la ecuación (nótese que a la izda. y dcha. tenemos la derivada de la función logarítmica, sin más):

$$\frac{1}{y}\frac{d}{dx}y = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{x}$$

Multiplicamos ambos lados por 'y' (es decir, pasamos 'y' al otro lado):

$$\frac{d}{dx}y = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot y$$

Es decir:

$$\frac{d}{dx}y = y' = \sqrt{2} \cdot \frac{x^{\sqrt{2}}}{x} = \sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-1} = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

De hecho, si sustituimos $\sqrt{2}$ por '*n*', veremos que se verifica perfectamente la regla de la derivación de una función con exponente real.

Voy a realizar una serie de ejercicios en los que me he liado durante un buen rato. Síntoma de que no tenía bien pillada la cosa. He desperdiciado por lo menos una hora mirando precipitadamente las fórmulas. El problema es del de siempre: PRISA + NO LEER BIEN. No hay que precipitarse. Hay que parar y ver las cosas con racionalidad y parsimonia. Recojo aquí los tres ejercicios que incorporan el tipo de cosas que me han liado.

Let $f(x) = x^{\sqrt{2}}$. This function is differentiable for all positive x. Compute $\frac{d}{dx}(f \text{ o } f)(x)$ using the Chain Rule.

Sabemos que, por la regla de la cadena $\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. En este caso, puesto que es (f de f) sería:

$$= f'(f(x)) \cdot f'(x), es\ decir$$

$$= \sqrt{2} \cdot (f(x))^{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

$$= \sqrt{2} \cdot (x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

$$= 2 \cdot (x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}-1} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

$$= 2 \cdot x^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot(-1)} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

$$= 2 \cdot x^{2-\sqrt{2}\cdot} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

$= 2 \cdot x^{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1} = 2x^1 = 2x$, *que tiene sentido sabiendo que:*

$$f(f(x)) = (x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = x^2$$

Este ejercicio es muy diferente a este otro: calcular la derivada de $f(x) = x^{\sqrt{2}}$.*Antes era (f o f)(x); ahora es f(x)!! (aquí he hecho el monguer un buen rato… lo de siempre: NO LEER BIEN, TENER PRISA, NOOOO!!!).(ESTO ESTÁ RESUELTO EN LA PÁGINA ANTERIOR)*

Este ejercicio, a su vez, es muy diferente a este otro. En este me he encabezonao tela….. Calcular:$\frac{d}{dx}log\ f(x)$, donde $f(x) = x^{\sqrt{2}}$

Es decir, <u>NO ES LA DERIVADA DE f(x) sino de $log\ f(x)$!!!!!!!!!!</u> Así:

$$f(x) = x^{\sqrt{2}}$$

$$y = x^{\sqrt{2}}, ahora\ hacemos\ log\ a\ ambos\ lados:$$

$$\log y = \log x^{\sqrt{2}}$$

$$\log y = \sqrt{2}\log x\,, y\ ahora\ derivamos\ en\ ambos\ lados$$

$$\frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}\sqrt{2}\log x$$

Como vemos, ya tenemos en la izda la incógnita que buscábamos, no tenemos que 'desarrollarlo' (ver la nota subrayada arriba…aquí me atascaba mil)…

$$\frac{d}{dx}\log y = \sqrt{2}\frac{d}{dx}\log x = \sqrt{2}\frac{1}{x}$$

ESTO ES ASÍ. HE PERDIDO UNA HORA Y PICO CONFUNDIENDO LOS ENUNCIADOS!!! NO PUEDE PASAR MÁS!!!

Este ejercicio, a su vez, es diferente al anterior. Nos piden la derivada de <u>f(x)</u> donde f(x)=x^{π}. (lo pongo para observar cómo, ahora sí, hemos de desarrollar la derivada de la izda, porque nos piden la derivada de 'f(x)'! no de 'log f(x)'!).

Naturalmente:

$$f(x) = x^{\pi}$$

$$y = x^{\pi}, hacemos\ \log a\ ambos\ lados$$

$$\log y = \log x^{\pi}\,, que\ es\ lo\ mismo\ que\colon\ \log y = \pi\log x\,, ahora\ derivamos\ a\ ambos\ lados$$

$$\frac{d}{dx}log\ y = \frac{d}{dx}\pi log\ x\,, desarrollamos\ la\ derivada\ de\ los\ logaritmos$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \pi\frac{d}{dx}log\ x\,, es\ decir\colon\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \pi\frac{1}{x}$$

Recordemos, nos piden la derivada de f(x), es decir, de 'y'. Ahora SÍ, tenemos que 'pasar' $\frac{1}{y}$ al otro lado (multiplicando, of course):

$$\frac{dy}{dx} = \pi \cdot \frac{1}{x} \cdot y, es\ decir\colon\ \frac{\pi}{x} \cdot x^{\pi}$$

Funciones trigonométricas.

Pequeño inciso sobre trigonometría.

Recojo aquí algunas definiciones trigonométricas.

$$\sin\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad \rightarrow \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad \rightarrow \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \rightarrow \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Ahora, algunas identidades interesantes en las que se ve que combinando unas con otras podemos deducir muchísimas otras identidades:

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta}$$

$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

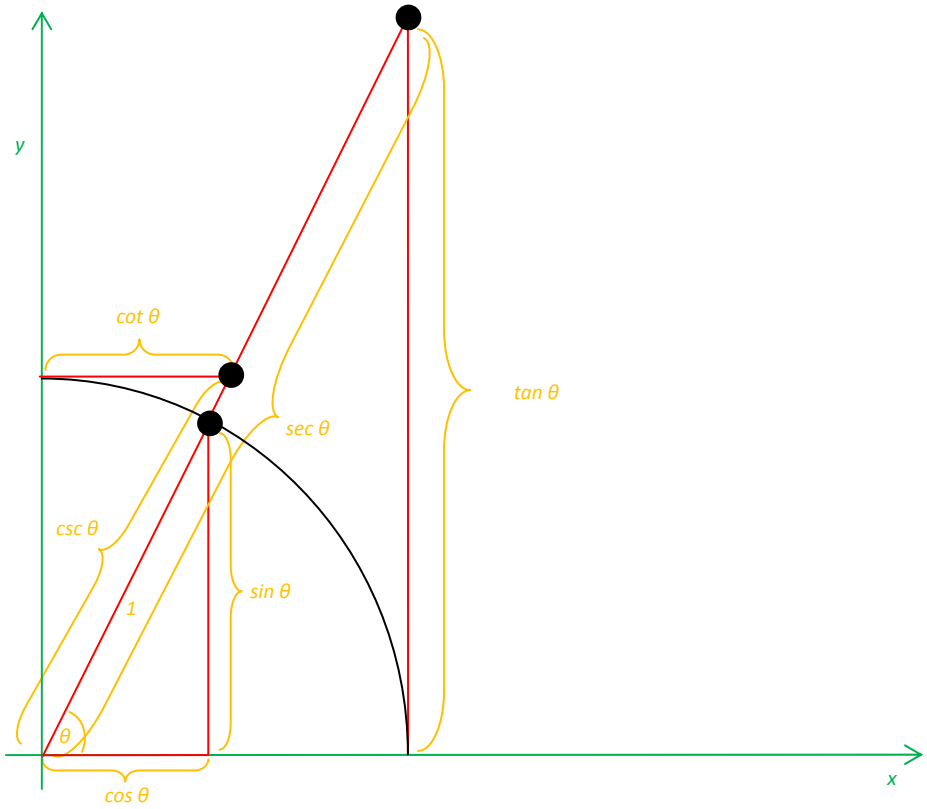
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Estas cosas, además, se pueden usar para computar números sin más…. Podemos usar el algoritmo de los cosenos/senos para otras cosas aparte de relaciones entre ángulos y lados

Miremos este interesante gráfico en el que se reflejan todas las magnitudes trigonométricas.



Obviamente, conociendo seno y coseno, podremos deducir todas las restantes.

**Nota: obsérvese que la "hipotenusa" (radio de la circunferencia) es perpendicular a la tangente.*

Importante: todo lo vamos a medir en radianes. Es decir:

$$\left(45° = \frac{\pi}{4}\right); \left(90° = \frac{\pi}{2}\right); (180° = \pi); \left(270° = \frac{3\pi}{4}\right); (360° = 2\pi)$$

Las funciones trigonométricas son un mundo extensísimo que no voy a poder recoger aquí con la brevedad que estoy imponiendo a estos textos. Baste decir sobre ellas que pueden parecer complejas pero que a nada que uno las piense se hacen bastante obvias. Lamentablemente las voy a tener que dar por sabidas por el momento (de hecho yo apenas recuerdo relaciones trigonométricas, pero lo cierto es que en cuanto las veo las identifico con cierta facilidad)… en todo caso desarrollaré aquellas que sean más convenientes para poder comprender los casos que aquí se recojan.

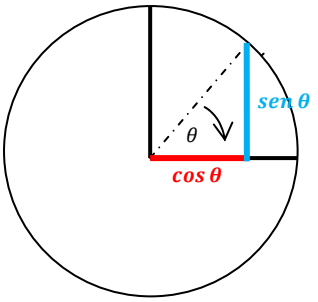
Veamos algunos límites de las funciones trigonométricas para ir abriendo boca.

$$\lim_{\boldsymbol{\theta\to 0}} \boldsymbol{sen\ \theta = sen\ 0 = 0}$$

Esto, si pensamos en una circunferencia, en el que el "radio horizontal", adyacente al ángulo θ, es el coseno, y el seno es el "radio vertical", no adyacente a θ, se nos hace obvio de inmediato. Con el mismo esquema en mente:

$$\lim_{\boldsymbol{\theta\to 0}} \boldsymbol{cos\ \theta = cos\ 0 = 1}$$

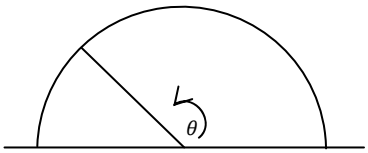
Piénsese en esto que hemos dicho mirando el siguiente esquema y veremos que es obvio:



Ahora vamos a demostrar un importante límite trigonométrico a partir del cual se deducen un montón de teoremas.

$$\lim_{\boldsymbol{\theta\to 0}} \frac{\boldsymbol{sen\ \theta}}{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{1}\ \ (\theta\ en\ radianes)$$

Sabemos por un teorema previo (no lo hemos demostrado en nuestras explicaciones, pero es obvio?? No…habría que incluirlo bien…), que el área de un sector circular de ángulo θ (radianes) y radio 1 es $\theta/2$. Es obvio si pensamos lo siguiente:

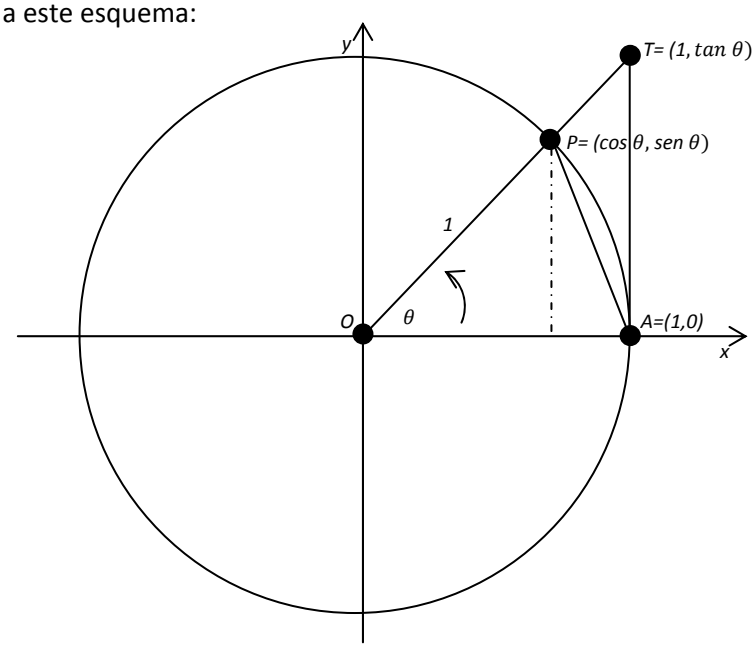


ver el motivo y documentarlo …

Sabiendo, pues, que:

(1) $\acute{a}rea\ del\ sector\ circular\ de\ \acute{a}ngulo\ \theta\ y\ radio\ 1\ es\ \theta/2$

Y atendiendo a este esquema:



Vamos a buscar una desigualdad entorno al 1. Así, por el cálculo del área de un triángulo sabemos que:

$$(2)\text{Área } \Delta\ OAP = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot sen\ \theta = \frac{sen\ \theta}{2}$$

$$(3)\text{Área } \Delta\ OAT = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot tan\ \theta = \frac{sen\ \theta}{2\cdot cos\ \theta}$$

Entonces por *(1), (2)* y *(3)*:

$$(2) < (1) < (3)$$

Es decir:

$$\frac{sen\ \theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{sen\ \theta}{2cos\theta}$$

Si multiplicamos por $\frac{2}{sen\theta}$:

$$1 < \frac{\theta}{sen\theta} < \frac{1}{cos\theta}$$

Ya casi lo tenemos. Ahora tomemos los inversos y cambiamos los signos de la desigualdad:

$$1 > \frac{sen\theta}{\theta} > cos\theta$$

Pero ya sabemos que $\lim_{\theta\to 0} cos\ \theta = cos\ 0 = 1$, luego, por el teorema del Sandwich (algo parecido a 'algo que está entre 1 y 1 debe ser 1'). Como, además, seno θ y θ son funciones impares (ver por qué: 'simetría'), podemos decir que seno theta/theta es una función par

(impar/impar=par), por lo que es una función simétrica. Dicha simetría nos dice que el límite por la izquierda y la derecha deben coincidir por lo que podremos afirmar que:

$$\boldsymbol{\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\ \theta}{\theta} = 1}$$

Que podremos usar para calcular muchos otros límites trigonométricos. Por ejemplo:

$$\boldsymbol{\lim_{h \to 0} \frac{cos\ h - 1}{h} = 0}$$

Como decía antes, la trigonometría tiene miles de relaciones internas que no estamos recogiendo aquí… Una de ellas es la fórmula del ángulo mitad:

$$\cos h = 1 - 2sen^2\left(\frac{h}{2}\right)$$

Entonces podremos decir que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{cos\ h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{2sen^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

Supongamos que $\theta = \frac{h}{2}$, entonces:

$$-\lim_{\theta \to 0} \frac{2sen^2\theta}{2\theta} = -\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \sin\theta = (-1) \cdot (0) = 0$$

Como he dicho anteriormente no vamos a desarrollar todas las demostraciones trigonométricas (probablemente haga un apartado especial para la trigonometría, pues es preciosa). De momento me conformaré con recoger las reglas de derivación rápida para las funciones trigonométricas.

Derivada de la función seno.

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\sin x = \cos x}$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - (\sin x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - (\sin x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin x\,(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{sen\ h}{h}$$

$$(\sin x) \cdot (0) + (\cos x) \cdot (1) = \cos x$$

Derivada de la función coseno.

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x}$$

Usaremos el mismo procedimiento que con el seno (con el matiz de que es coseno y hay que conocer las 'identidades trigonométricas'):

$$\frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h\to 0}\frac{cos\,(\mathrm{x}+\mathrm{h}) - (\cos x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{cos\,\mathrm{x}\cos h - \sin h \sin x - (\cos x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{cos\,\mathrm{x}(\cos h - 1) - \sin h \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot \lim_{h\to 0}\sin x$$

$$= \cos x \cdot (0) - (1)\cdot \sin x$$

$$= -\sin x$$

Derivada de la función tangente.

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x}$$

Mediante las dos reglas anteriores es fácil de deducir:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x}$$

Que es la derivada de un cociente:

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{cos^2 x}$$

$$= \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x}$$

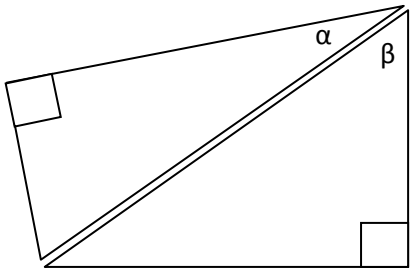
Que, por las 'Identidades Pitagóricas', sabemos que:

$$= \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$$

Vamos a recoger un ejemplo geométrico que nos permita visualizar la certeza de esto que acabamos de hacer con la tangente.

$$\frac{d}{dx}\tan x = sec^2 x$$

Supongamos dos triángulos rectángulos que tienen la misma longitud de hipotenusa (el resto de lados no es igual, naturalmente, si no sería el mismo triángulo XD: **sólo misma hipotenusa**):



Supongamos α < 45° y β>45°.

Sobre α:

Sabemos que la secante es la inversa del coseno, es decir, si:

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

Entonces:

$$\sec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

Como es visible, la hipotenusa es mayor que el cateto adyacente, es decir dividimos un número h por uno menor que h, por lo que podemos decir que:

$$1 < \sec\alpha$$

Sobre β podemos decir que es, seguro, mayor que sec α, pues la proporción entre hipotenusa y cateto es aún mayor que en el caso anterior, es decir, el denominador es aún menor en el caso de β que en el de α. Así:

$$1 < \sec\alpha < \sec\beta$$

Podemos seguir desarrollando esto. Elevemos al cuadrado.

IMPORTANTE ¿Por qué? Éste es el típico truco que el profesor se sacaba de la manga y que nos dejaba a todos flipados… ¿por qué se le ocurre elevar al cuadrado? Claro, pensaba yo, lo hace porque ya sabe el final y conoce los pasos que debe dar. Nos dice que es obvio, pero sólo es ovbio para él porque conoce 'el fina de la película'. Sin embargo, no es tan así. Nosotros también conocemos parte del final de la película. Sabemos que estamos buscando demostrar algo así como $\frac{d}{dx}\tan x = sec^2 x$

Así que, sencillamente, empecemos a 'acercar' las cosas y sigamos jugando con los números. Sencillamente es eso, 'acercar' y seguir jugando, desarrollando, a ver a dónde llegamos. Así es como se descubren estas relaciones.

Como decíamos, elevamos al cuadrado:

$$1 < sec^2\,\alpha < \sec^2\,\beta$$

La diferencia entre $sec^2\,\alpha < \sec^2\,\beta$ se hace cada vez mayor. Esto qué quiere decir. Si miramos el ejemplo gráfico que hemos recogido vemos claramente que un cambio en β, por pequeño que sea, va a afectar mucho más a la tangente de β que el mismo cambio en α. Es decir, observamos la relación que hay entre la secante y los cambios en la tangente que, en definitiva es lo que recoge la derivada: pequeños cambios en la tangente se muestran sensiblemente en la secante al cuadrado (ojo con esta última expresión… pensarla bien ante de aceptarla como dogma).$\frac{d}{dx}\tan x = sec^2 x$

Veámoslo ahora numéricamente. Supongamos esto:

tan 45° = 1 (esto es obvio si visualizamos un triángulo rectángulo de 90°- 45°- 45°)

tan 46° = ?

*tan 46° = tan (*45°+1°)

Recordemos: **SIEMPRE EN RADIANES. TÉNGASE EN CUENTA QUE TODOS ESTOS CÁLCULOS DE DERIVACIÓN TIRGONOMÉTICA LOS ESTAMOS CALCULANDO SONBRE UNA CIRCUNFERENCIA TIPO DE RADIO 1, Y SOBRE ESA CIRCUNFERENCIA MEDIMOS EN RADIANES**. Pasamos, pues, a radianes:

$$tan\,46° = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right)$$

Así, veamos el incremento que se produce sobre 45° mediante *f(x+h)=f(x)+f'(x)·h*:

$$tan\,46° \approx \tan 45° + f'(45°)\cdot h \approx tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

Es obvio: es el (punto de partida)+(proporción en que se recorre ·la distancia que se recorre) (proporción que, recordemos, es la derivada….la ratio de cambio en un punto, en un segmento muy pequeño, en un diferencial)

$$\tan 46° \approx 1 + 2\cdot\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

Es obvio que $sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, pues, en nuestra circunferencia de radio = 1:

$$\cos 45 = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \sec\theta = \frac{\sqrt{2}}{1} \rightarrow \sec^2\theta = \sqrt{2}^2 = 2$$

Luego:

$$\tan 46° \approx 1 + \left(\frac{\pi}{90}\right)$$

$$\tan 46° \approx 1 + (0.035\ldots)$$

$$\tan 46° \approx 1.035\ldots$$

PERFERRRRRTOORRRRRR

Combinación de funciones. Regla de la cadena.

Esto no tiene mayor ciencia que la aplicación de la regla de la cadena tal como la conocemos.

Por ejemplo, imaginemos la función:

$$f(x) = \sin(x^2)$$

Naturalmente:

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Reglas de derivación directa para el resto de funciones trigonométricas.

Se pueden deducir perfectamente con lo que ya conocemos. No tiene mayor interés hacerlo así que nos limitaremos a recogerlas aquí.

Derivada de la función secante.

$$\frac{d}{dx}\sec x = tan\, x \cdot sec\, x$$

Derivada de la función secante.

$$\frac{d}{dx}\csc x = -cot\, x \cdot csc\, x$$

Derivada de la función cotangente.

$$\frac{d}{dx}\cot x = csc^2\, x$$

En resumen:

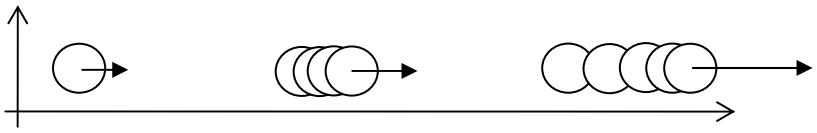
$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$	$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
$\frac{d}{dx}\tan x = sec^2\, x$	$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
$\frac{d}{dx}\sec x = sec\, x \tan x$	$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

Analicemos en un bello ejemplo el comportamiento oscilatorio de las funciones trigonométricas seno y coseno.

Geométricamente, si uno piensa en la circunferencia goniométrica (el círculo unidad) e imagina un radio girando, puede visualizar fácilmente cómo el seno y el coseno van oscilando alternativamente entre 1 y -1.

Veamos ahora un ejemplo en el que se relacionan de una manera verdaderamente hermosa la oscilación de las funciones seno/coseno y la realidad.

Imaginemos una relación en que velocidad = posición.



La velocidad crece infinitamente de manera paralela a la posición de la partícula.

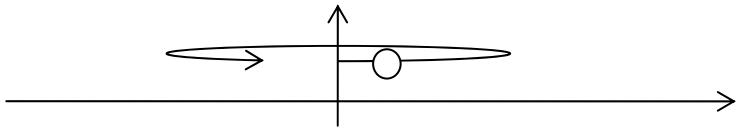
Para que esto fuera así, deberíamos estar tratando de una función que, sabiendo que la velocidad es la derivada de la posición, permite que la derivada de la función original sea igual a la función original, es decir, algo así como:

$$f(t) = f'(t)$$

De ese tipo conocemos una función:

$$f(t) = e^t \rightarrow f'(t) = e^t$$

Ahora supongamos una función en que aceleración= - posición.



Sabemos que la aceleración es la derivada segunda de la posición. Es decir, necesitamos una función cuya derivada segunda sea igual a la función original · (-1). Naturalmente, ya sabemos qué funciones son ésas:

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

----- *o* -----

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

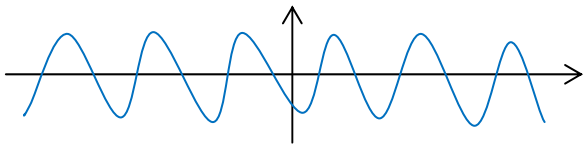
$$f''(x) = -\cos x$$

¡¿A qué es chulo?! SÍ.

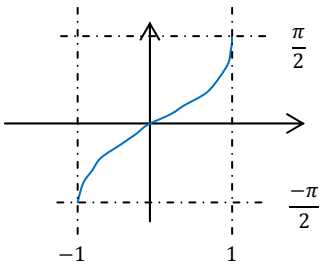
Las funciones trigonométricas nos sirven, así, para explicar los fenómenos que se repiten según una cierta periodicidad: muelles, rotaciones, movimientos periódicos, etc…

Derivada de la inversa de las funciones trigonométricas.

Supongamos la función seno:



Obviamente, si la invertimos, no será una función por que no pasará la prueba de la 'línea vertical' (recordemos: un solo output para un input: una relación inyectiva). Pero si lo limitamos a $[\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2}]$, entonces sí (invertimos y limitamos al rango indicado):



Aquí, sí, la inversa se define como ***y=arcsin x***.

Por cuestiones de desplazamiento entre funciones, el dominio de las funciones trigonométricas inversas es:

$$y=\arcsin x \;\rightarrow\; [\tfrac{-\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]$$

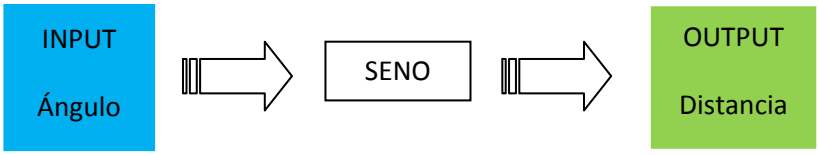
$$y=\arccos x \;\rightarrow\; [0,\Pi]$$

$$y=\arctan x \;\rightarrow\; [\tfrac{-\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]$$

Me he llevado un buen rato comiéndome el tarro sobre el seno, el seno de Θ, el arcoseno, el cateto, la hipotenusa… y me he metido yo solo en un atolladero del que he tardado un rato en salir por mí mismo. He estado mezclando magnitudes que se dan en ángulos con magnitudes que se dan en distancias, triángulos rectángulos de Pitágoras con senos/cosenos en circunferencias de radio 1, etc… Al final, lo he visto tan claro que las dos horas que he estado dándole vueltas a la cabeza me han parecido una pérdida de tiempo.

¿Qué es un seno/coseno? Una distancia. No cabe equivocarse jamás sobre esto. No es un ángulo, es una **distancia**. El seno y el coseno son FUNCIONES que, digamos, SE NUTREN DE ÁNGULOS, para devolver DISTANCIAS.

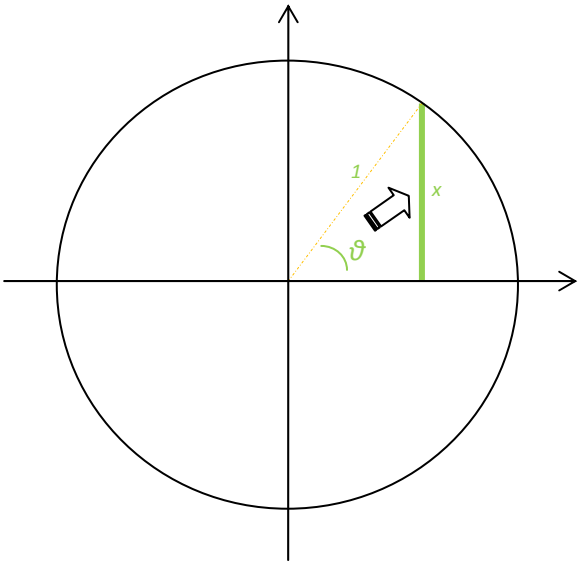
Seamos un poquito más ortodoxos: son funciones cuyo INPUT son ÁNGULOS y cuyo OUTPUT son distancias.



SENO/COSENO/TANGENTE/COTANGENTE/SECANTE/COSECANTE: (DISTANCIAS)

En una circunferencia de radio igual a 1 podemos plantear, usando la función seno, la siguiente pregunta: PARA UN ÁNGULO Θ, ¿QUÉ SENO SALE? Qué distancia sale? La respuesta es, en este caso, una distancia 'x'.

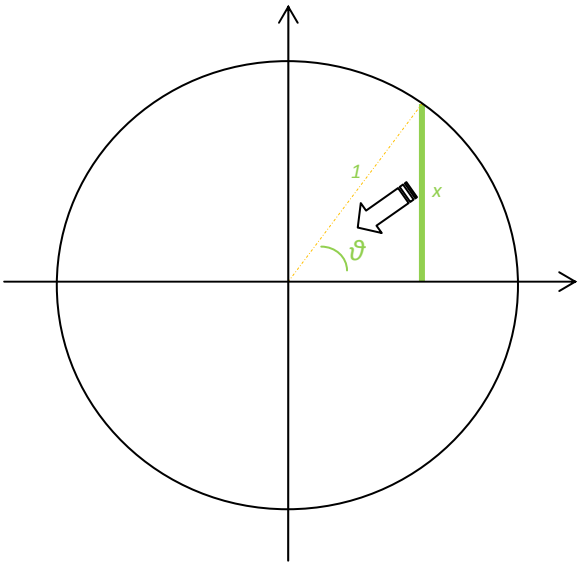
Es decir, la función SENO recibe de INPUT un ÁNGULO y devuelve una DISTANCIA de OUTPUT.



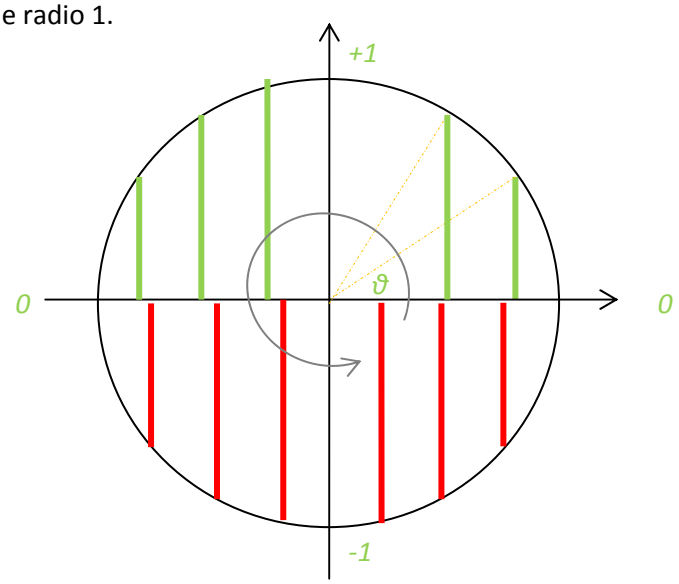
ARCOSENO/ARCOCOSENO/ARCOTANGENTE: (ÁNGULOS).

Como es la función inversa, hace justo lo contrario que la función seno que hemos comentado antes. PARA UN DISTANCIA X, ¿QUÉ ÁNGULO ES NECESARIO? La respuesta, en este caso, es un ángulo Θ.

Es decir, la función ARCOSENO (y lo mismo para el resto de funciones arco…) recibe de INPUT una DISTANCIA y devuelve un ÁNGULO (un arco) de OUTPUT.



El seno, como sabemos oscila entre [+1,-1]. Según el ángulo que introduzcamos como INPUT a la función seno nos dará, siempre, un valor comprendido entre el +1 y el -1 de una circunferencia tipo de radio 1.



El seno es una distancia que, según cambie el ángulo que le aportemos como INPUT, nos aportará una DISTANCIA que oscilará entre +1 y -1 como fácilmente observamos en la figura anterior.

Por otro lado, el **arcoseno** aporta un OUTPUT que oscila entre [0°,360°] (medido en radianes), según los valores [+1,-1] que le aportemos como INPUT. Hace justo, como hemos visto, lo inverso al seno.

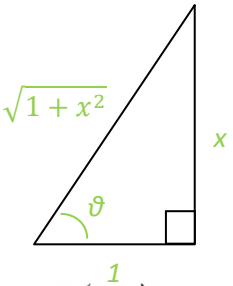
Así, para una serie de senos, tendremos los arcos correspondientes.

SENO	ARCOSENO
0	0°
1	90°
0	180°
-1	270°

Es importante distinguir lo siguiente:

- Mediante el teorema de Pitágoras sólo podemos medir distancias.
- Mediante la circunferencia de radio 1 podemos medir distancias y ángulos.

Ahora, vamos a profundizar en la relación que existe entre el seno y el arcotan (sí, arcotangente, es decir, no vamos a usar la inversa del seno, sino otra inversa, para ver cómo se interrelacionan las funciones entre sí). Para ello vamos a retomar Pitágoras y vamos a tomar algunas medidas.



OJO A ESTO PORQUE AQUÍ SE ACLARAN ALGUNAS COSAS QUE A VECES LÍAN.

PERO DEFINITIVAMENTE ESTÁN CLARÍSIMAS AQUÍ.

Por el teorema de Pitágoras sabemos fácilmente varias cosas:

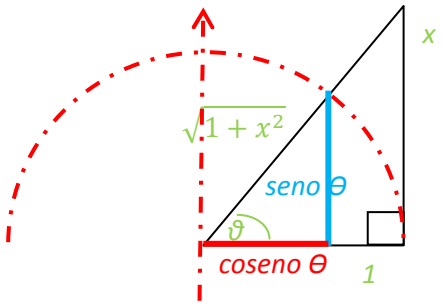
$$La\ magnitud\ (distancia) del\ seno = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

Sabemos que la hipotenusa es $h = \sqrt{C1^2 + C2^2}$, luego, ya, por Pitágoras, tenemos suficiente información para saber que:

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ (que\ ya\ sabemos\ que\ es\ una\ distancia)$$

Es decir, obviamente, en el triángulo rectángulo anterior EL SENO NO ES X, SINO X/HIPOTENUSA. ES DECIR, EL SENO ES MÁS PEQUEÑO QUE X. EL COSENO DEL ÁNGULO TAMPOCO ES EL 1, SINO ALGO MÁS PEQUEÑO: 1 PARRTIDO DE HIPOTENUSA. EN DEFINITIVA:

LOS CATETOS NO SON NI EL SENO NI EL COSENO (hubo momentos en que lamentablemente me liaba con esto). PARA ENTENDER LO QUE DECIMOS MIREMOS ESTE ESQUEMA: POR UN LADO, EN NEGRO, EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO PITAGÓRICO QUE NOS TRAEMOS ENTRE MANOS Y, POR OTRO LADO, EN AZUL EL SENO Y EN ROJO EL COSENO INSERTOS EN LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO UNIDAD (TAMBIÉN EN ROJO):



De hecho, si comparamos con esquemas anteriores, 'x' es la tangente (NUNCA EL SENO!!!). Creo que no hace falta decirlo más pero lo digo por últimas vez, el seno no es el cateto opuesto de un triángulo pitagórico…. El seno es menor que el cateto opuesto, es el cateto opuesto del triángul opitagótico / hipotenusa y, por lo tanto, una magnitud diferente y menor, como se ve en el esquema anterior.

Por otro lado sabemos que:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{x\cdot\sqrt{1+x^2}}{1\cdot\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1} = x$$

Justo como dijimos antes

(OJO, ESTO ES LA TANGENTE, NO TIENE NADA QUE VER CON LA HIPOTENUSA! LA HIPOTENUSA YA SABEMOS QUE ES: $\sqrt{1+x^2}$)

Es decir, sabiendo que x es la tangente que surge para un ángulo θ, podremos decir que el arctan de esa distancia x es el ángulo θ. Es decir, si la tangente de un ángulo es x, el ángulo que 'genera' esa x es Θ. Así:

$$\arctan x = \Theta$$

En definitiva, combinando ambas funciones, tenemos que si:

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Y

$$\arctan x = \theta$$

Entonces podemos combinar ambas formas y decir:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin(\arctan(x))$$

Ya dijimos al inicio de este ejemplo que es deliberado que se combine el seno con el arctan, es decir, no es directamente con su inversa…se hace sencillamente para que se pueda apreciar como mero ejemplo de combinaciones de funciones trigonométricas y, así, para que podamos ver cómo interaccionan entre ellas y la cantidad de relaciones que se pueden extraer de estas combinaciones.

Como conclusión de esta parte.

Las funciones inversas trigonométricas son, eso, funciones INVERSAS. Es decir, 'deshacen' lo que hacen las funciones originales.

Una vez entendido esto, pasemos a calcular la derivada de las funciones trigonométricas inversas.

Derivada de arcoseno.

Vamos a derivar esto:

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = ?$$

¿Qué sabemos de la función arcoseno? Que es la inversa de la función seno (al menos para un domino restringido de valores de x (recordemos que si cojo todo el dominio de x, entonces deja de ser una función)). Así, como es la inversa podemos decir que:

$$\arcsin(\sin x) = x\ (para\ unos\ valores\ determinados\ de\ x)$$

Es decir, si yo le aporto al seno un ángulo, éste me da un número; ahora cojo ese número y se lo aporto al arcoseno y éste me aporta un ángulo, ¿cuál? El mismo que yo aporté en un primer momento al seno.

Veámoslo con la relación entre otras dos inversas:

Pensemos en estas dos funciones inversas:

$f(x) = \sqrt{x}\ y\ f^{-1}(x) = x^2$

Entonces, si pongo a la original en función de su inversa:

$f(f^{-1}(x)) \rightarrow f(x^2), obtendré, naturalmente, x, pues:$

$f(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

Pues lo mismo pasa con las inversas trigonométricas.

Así, vamos a proceder de manera análoga:

$$\arcsin(\sin x) = x$$

Derivemos a ambos lados (a la izquierda se le aplica la regla de la cadena, obviamente):

$$\arcsin'(\sin x) \cdot \cos x = 1$$

Luego:

$$\arcsin'(\sin x) = \frac{1}{\cos x}$$

Ahora, si suponemos que el coseno es positivo, podemos reescribir como (recordemos las identidades trigonométricas, despejando 'cos x' de la identidad $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$). ¿Por qué este 'truco deus ex machina'? Ya lo hemos visto antes. Estamos tratando de arrimar el 'ascua a nuestra sardina'. Estamos tratando de tener ambos lados de la ecuación en función de la misma incógnita. Así:

$$\arcsin'(\sin x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 x}}$$

Ya tenemos, como hemos dicho, el lado izquierdo de la ecuación $\arcsin'(\sin x)$ y el derecho $\frac{1}{\sqrt{1-sen^2 x}}$ en función de la misma incógnita:

$$\arcsin'(\sin x) = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2 x}}$$

Que podríamos terminar de resumir así (pues ambos lados comparten incógnita):

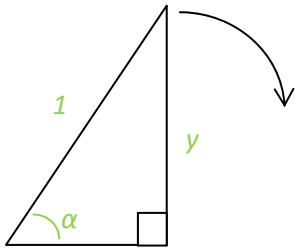
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Luego, suponiendo que arcoseno sea diferenciable (es decir, que el coseno sea positivo y que arcoseno esté comprendido entre los márgenes que ya establecimos antes), podremos definir la regla de derivación rápida del arcoseno como:

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

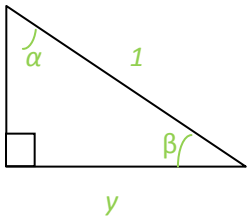
Derivada de arcocoseno.

Podríamos hacerlo mediante el mismo procedimiento. Pero lo vamos a ilustrar de otro modo para seguir viendo como interaccionan las relaciones trigonométricas. Supongamos el siguiente triángulo (**esta vez SÍ, DENTRO DE UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO 1**):



De donde sabemos que *sin α=y, luego el arcsin y = α (claro! Recordemos que estamos en una circunferencia de radio la unidad).*

¿Cuánto es el arcocoseno de y? Llamemos β al otro ángulo y démosle la vuelta:



De donde sabemos que cos β = y, *luego el arccos y =* β (OJO, ahora estamos con el coseno, no con el seno, estamos con el lado adyacente al ángulo). Sabemos que, necesariamente:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$ *(90°, pues los otros 90° los tiene 'ocupados' el ángulo recto)*

Por lo que podremos decir, para el triángulo que estamos estudiando que:

$$\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}$$

Esta fórmula es interesante. Vemos que el resultante es una constante, por lo tanto, si "desplazamos" $\arcsin y$, tendremos que "desplazar" de manera equivalente, y negativa, $\arccos y$. Eso sobre la función original… ¿Pero qué pasa con la derivada? Muy simple, derivemos a ambos lados:

$$\frac{d}{dy}\arcsin y + \frac{d}{dy}\arccos y = \frac{d}{dy}\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dy}\arcsin y + \frac{d}{dy}\arccos y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dy}\arccos y = -\frac{d}{dy}\arcsin y$$

Y esto de la derecha ya lo conocemos de antes, de manera que podremos decir que:

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Derivada de arcotangente.

Vamos a usar el mismo procedimiento que hemos usado para la función arcoseno.

Nos preguntamos por la derivada de la función arcotangente:

$$\frac{d}{dx}\arctan x = ¿\,?$$

Sabemos que la función arcotangente es la función inversa de la función tangente, así podemos decir que:

$$\arctan(\tan x) = x$$

Luego, si derivamos a ambos lados:

$$\frac{d}{dx}\arctan(\tan x)\cdot sec^2 x = \frac{d}{dx}x$$

$$\frac{d}{dx}\arctan(\tan x) = \frac{1}{sec^2 x}$$

Ahora, conocemos la identidad Pitagórica fundamental:

$$sin^2 x + cos^2 x = 1$$

Si dividimos todos los miembros de esta identidad por $\frac{1}{\cos^2 x}$, tenemos que:

$$(1)\ \ tan^2 x + 1 = \frac{1}{cos^2 x}$$

Que es lo mismo que:

$$(2)\ tan^2 x + 1 = sec^2 x$$

Luego podremos decir, combinando (1) y (2) que:

$$\frac{d}{dx}\arctan(\tan x) = \frac{1}{tan^2 x + 1}$$

Y, como ya tenemos ambos lados de la ecuación en función de la misma incógnita, podremos concluir que:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Añado, finalmente las derivadas del resto de funciones trigonométricas inversas (no las demuestro, aunque ya conocemos el modo de hacerlo).

$$\frac{d}{dx}\text{arccsc}(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\text{arcsec}(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}arcctg = \frac{-1}{1+x^2}$$

Algunos ejercicios resueltos.

27.- (Robert A. Adams. "Calculo", sección 3.5, p. 234).Derivar:

$$g(x) = \frac{arcsin\, x}{arcsin\, 2x}$$

$$g'(x) = \frac{arcsin\, 2x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - arcsin\, x \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\right)}{(arrcsin\, 2x)^2}$$

$$= \frac{\boldsymbol{arcsin\, 2x \cdot \sqrt{1-4x^2} - 2\, arcsin\, x \cdot \sqrt{1-x^2}}}{\boldsymbol{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-4x^2} \cdot (arcsin\, 2x)^2}}$$

19.- (Robert A. Adams. "Calculo", sección 3.5, p. 234).Derivar:

$$y = arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x-1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4x^2+1-4x}{9}\right)}} \cdot \left(\frac{6}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{9-4x^2-1+4x}{9}}} \cdot \left(\frac{6}{9}\right) = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+8+4x}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{-x^2+x+2}}}$$

29.- (Robert A. Adams. "Calculo", sección 3.5, p. 234).Derivar:

$$f(x) = \sqrt{arcsin\, x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{arcsin\, x^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^2}}\right) \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{arcsin\, x^2} \cdot \sqrt{1+x^4}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\sqrt{(arcsin\, x^2) \cdot (1+x^4)}}}$$

Explicaciones definitivas

Derivadas 4. Aplicación de las derivadas. ¿Para qué sirven?

La aplicación de las derivadas se dirige, fundamentalmente, a dos campos:

4.1- El estudio del comportamiento de funciones en sus límites.

4.2- El estudio del cambio y la interrelación entre dos magnitudes.

4.3- Optimización.

4.4- Aproximación lineal. Cálculo de magnitudes.

4.1. Evaluación de límites mediante la derivación

Ya hemos visto cómo se evalúan los límites de funciones. Sin embargo hay límites de funciones verdaderamente raras cuyo estudio, mediante los métodos que hasta ahora conocemos, son realmente difíciles de analizar. Para facilitar el estudio de los mismos se usan las derivadas. Para ello vamos a ver la **Regla de L'Hopital-Bernoulli**.

Supongamos el siguiente límite:

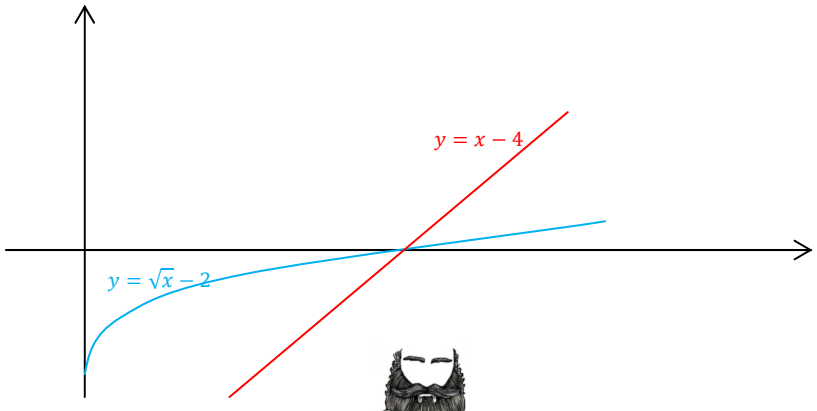
$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

Sabíamos que el límite de un cociente es el cociente de sus límites. Analicémoslo:

$$\frac{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}-2}{\lim\limits_{x\to 4}x-4}=\frac{0}{0}$$

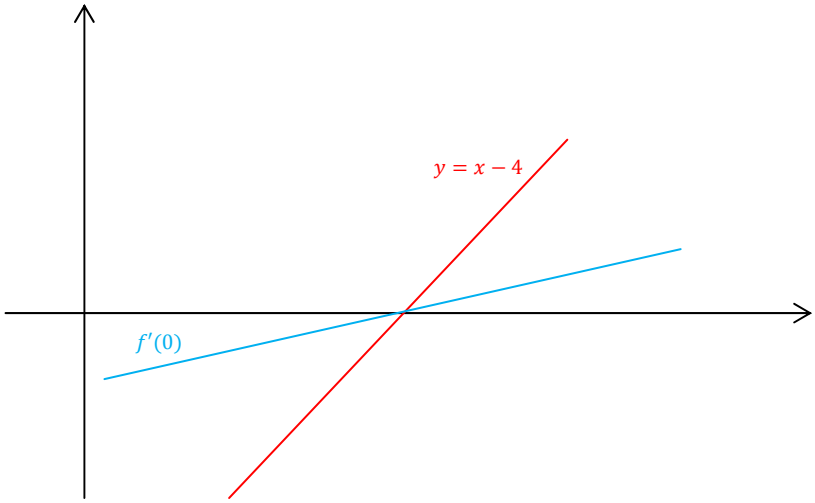
EL HORROR! Una indeterminación. Esto no podemos usar. Se está dando una situación 'contrapuesta', una suerte de equilibrio absurdo en el que el numerador se está intentando hacer un resultado infinitamente pequeño pero, a su vez, el denominador, que intenta hacerse pequeño, busca que el resultado final sea inmensamente grande. Una especie de contraposición absurda en la que 'ninguno sale victorioso' y que nos lleva a un callejón sin salida. Una indeterminación para la que no podemos usar la regla que hemos mencionado según la cual: 'el límite de un cociente es el cociente de sus límites'. Tenemos que buscar otra estrategia.

Lo primero que vamos a hacer para ver qué está pasando es visualizarlo geométricamente:



Vemos fácilmente que cuando x=4 ambas funciones se cruzan, en ambas y=0. Vemos, de cualquier modo que en la función azul (desde la derecha) se acerca más rápidamente a 4 que la función roja.

Hagamos una cosa, calculemos la derivada a la función azul en el punto de intersección, es decir, conozcamos la pendiente en ese punto y, por lo tanto, tracemos una recta por ese punto con esa pendiente (naturalmente, ya sabemos que será la recta tangente a la curva de la función original en ese punto concreto):



La función derivada, naturalmente, es:

$$f(x) = \sqrt{x} - 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

De donde:

$$f'(4) = \frac{1}{4}$$

Como ya conozco la pendiente en el punto (0,4), calculamos fácilmente la ecuación de la recta tangente es (obvio):

$$y - 0 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x - 1$$

¿Qué está pasando cuando estudiamos el límite de un cociente, como el que nos traemos entre manos, y sustituimos las funciones originales por sus líneas tangentes (de momento no la derivada, sino la ecuación de la recta tangente)?

(obviamente para x-4 no hay que derivar nada, ella misma es su tangente a ella misma en todos sus puntos)

$$\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{4}(x-4)}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Podemos generalizar diciendo que, sea:

$$(1)\ \lim_{x\to a} f(x)=0\,,y\ que,\lim_{x\to a} g(x)=0$$

Ambas continuas y diferenciables en 'a', entonces, si queremos calcular:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Podemos hacer una aproximación, ver el 'comportamiento tangente' en un segmento realmente pequeño, infinitesimal entorno al punto x='a', podemos 'acercar el microscopio a ese punto' para ver cómo cambia... es decir, sabemos que, aproximadamente, podemos decir que f(x) y g(x) son:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(a)+f'(a)\cdot(x-a)}{g(a)+g'(a)\cdot(x-a)}$$

Pero, también sabemos por (1) que f(x) y g(x) son iguales a 0 para todo x (es una función continua), por lo que podemos sustituir:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(a)\cdot(x-a)}{g'(a)\cdot(x-a)}$$

Además, sabemos que x es prácticamente igual a 'a', por lo que podemos quedarnos finalmente con:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Y es esto es a lo que se llama La **regla de L'Hopital-Bernoulli**.

Más precisamente:

Siendo f y g funciones diferenciables en los alrededores de 'a'.

Si $lim_{x\to a}\,f(x)=\ lim_{x\to a}\,g(x)=0$, *&* $lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$ ∃, *&* $g'^{(x)}\neq 0$ (ó $\pm\infty$) ∀*x cercana a 'a'*

Entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Vamos a aplicar esto realizando un ejercicio un poco más jodido .

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$$

El numerador y el denominador son, ambos, igual a 0, por lo que aplicaremos la regla de L'Hopital-Bernoulli. Ojo, no hacemos la derivada de un cociente, sino la aplicación de la R.HB (no cometer nunca ese fallo!): **f'(x)/g'(x)**:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x+x)}{4x^3}$$

Como es de imaginar, podemos volver a aplicar R.HB (obvio…la igualdad se 'hereda'):

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-\cos x+1)}{12x^2}$$

And again and again… hasta librarme, por ejemplo, de la x en el denominador (esto es lo guapísimo de la R.HB):

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{24x}$$

And again…:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{24}=\mathbf{\frac{1}{24}}$$

Y como este último límite existe, todos los anteriores 'ancestros' también existen.

Siguiendo por donde íbamos, como dijimos anteriormente (en rojo) en la definición de la R.HB., también puede usarse para cocientes de $\pm\infty$.

Veamos un caso de tal tipo:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2-x}$$

Aplicando R.HB. sucesivamente:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{6x}=\;=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Pero no sólo es útil para cocientes de 'casos extremos'. También podemos usarlo en productos entre 'casos extremos' (en este caso (0·∞), siempre que lo 'convirtamos' a un modo compatible con las necesidades de R.HB., así:

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x),\ que\ es\ del\ tipo\ \ 0\cdot\infty$$

Lo convertiremos en un cociente del tipo: $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{1/x}, \textit{que ahora sí es del tipo } \frac{0}{0}$$

Ahora sí podremos aplicar R.HB.:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} = \cos 0 = 1$$

Veamos ahora ejemplos de 'casos extremos' elevados a 'casos extremos'. Tendremos que convertirlo, también, al modo oportuno para aplicar la R.HB.

$$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x$$

Esto es del tipo (1^{∞}). Esta transformación es más raruna:

$$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e^{\ln \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}$$

Téngase en cuenta que $e^{\ln}$ es 'e' elevado a su función inversa, es decir, no es nada, es 1. Pero nos ayuda a transformar la forma en que estamos presentando el límite. Sabemos que log de un límite el límite del log, por lo que:

$$= e^{\lim_{x\to\infty} ln\,(1+\frac{1}{x})^x}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} x\cdot ln\,(1+\frac{1}{x})}$$

Ya tenemos algo del tipo $(\infty\cdot 0)$, que es fácil de transponer a las formas que necesitamos:

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\left(\frac{0}{0}\right)}$$

Ahora podemos empezar a aplicar la R.HB:

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = \boldsymbol{e}$$

Veamos otro tipo de ejemplo de 'casos extremos' elevados a 'casos extremos'. Tendremos que convertirlo, también, al modo oportuno para aplicar la R.HB.

$$\lim_{x\to\infty} (x)^{\frac{1}{x}}$$

Que es del tipo ∞^0. 'Acerquémoslo' a la forma que necesitamos.

$$= e^{\ln \lim_{x\to\infty} (x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} ln\,(x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot ln\,(x)} \ , que\ es\ del\ tipo\ 0\cdot\infty, fácilmente\ transformable\ a\ \frac{\infty}{\infty}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{ln\,(x)}{x}}$$

Ahora podemos empezar a aplicar R.HB:

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1}} = e^{\frac{0}{1}} = e^0 = \mathbf{1}$$

Veamos ahora ejemplos de 'casos extremos' sumados y/o restados por 'casos extremos'. Tendremos que convertirlo, también, al modo oportuno para aplicar la R.HB.

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)\,, que\ es\ del\ tipo\ \infty - \infty$$

Como vemos, el problema siempre radica en ser capaz de transformar la forma original a la forma necesaria para R.HB. Vamos, pues a ello:

$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot (\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1)\,, que\ ya\ es\ fácilmente\ transformable\ a\ la\ forma\ \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1)}{\frac{1}{x}}$$

Ahora podemos empezar a aplicar la R.H.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

En definitiva, estas son las transformaciones a las que nos enfrentaremos para 'acercar el ascua a la sardina' de la R.HB.

L'HOPITAL-BERNOULLI NECESITA LA FORMA $\frac{0}{0}$ O $\frac{\infty}{\infty}$	
$0\cdot\infty$	$[\infty/(1/0)]$ ó $[0/(1/\infty)]$
1^∞	$e^{\ln 1^\infty}$: $e^{\infty\cdot\ln 1}$: que es $e^{\infty\cdot 0}$, que nos remite a la forma $0\cdot\infty$
∞^0	$e^{\ln \infty^0}$: $e^{0\cdot\ln\infty}$, que nos remite de nuevo a $0\cdot\infty$
0^0	$e^{0\cdot\ln 0}$
$\infty - \infty$	$\frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty\cdot\infty}}$

Pero en la R.HB no es oro todo lo que reluce. Ojo, con L'Hopital-Bernoulli pues encierra varias trampas.

1- Una de ellas: el razonamiento circular. Por ejemplo: podemos estar tentados de encontrar, mediante R.HB, fácilmente un límite importante que antes tuvimos que encontrar por un procedimiento más difícil. Nos referimos a:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

Aplicamos R.HB:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos 0}{1}=\frac{1}{1}=1$$

Todo parece muy bonito y simple, pero encierra una trampa.

¿Cómo sabemos que la derivada del seno x es coseno de x? Lo sabemos porque conocemos el límite del (seno x / x) cuando x tiende a 0. Es decir, para poder derivar seno x tenemos que conocer el límite anterior (seno x/x) y, si pretendemos demostrar el límite anterior mediante R.HB. derivando el seno de x, como es fácilmente apreciable, estaríamos cayendo en un razonamiento circular. Es decir, estamos incluyendo la conclusión como un axioma. Para derivar seno de x demostramos el límite derivando seno de x... un razonamiento inválido (TAREA A INCLUIR: pensar un poco por qué pasa con el seno y no con otras funciones como x^2….).

2- Otra trampa:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\mathrm{x}+\sin x}{x}$$

Apliquemos RHB:

$$=\lim_{x\to \infty}\frac{1+\cos x}{1}$$

Problema: ¿cuál es el límite de coseno de x cuando x tiende a infinito? Tenemos un problema, porque mientras x se acerca a infinito, el coseno sigue oscilando entre 1 y -1 continuamente, sin acercarse a ningún valor concreto… Es decir: **este segundo límite no existe**. Aplicando la transmisión a los ancestros de la regla de RHB. tendríamos que extender la no existencia del límite a la función original… pero veremos que ahí la RHB falla, pues el primer límite sí existe…

Calculémoslo de otro modo (usando las reglas de cálculo de límites que se estudiamos en el apartado de los límites).

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\mathrm{x}+\sin x}{x}=\lim_{x\to \infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x}=1+0^{*}=2$$

*Nota: sabemos que sin x oscila entre -1 y 1, es decir, será un número finito (en el mejor de los casos +1) dividido por infinito. Eso necesariamente nos obliga a aceptar que el límite es 0.

RHB puede decirnos que no existe un límite cuando sí existe (no sucede lo mismo con la viceversa… es decir, si tenemos la viceversa (existe el límite por RHB) podemos estar seguros de que existe en sus 'ancestros').

Es decir: cautela. Sólo usar RHB si estamos seguros (son polinomios simples, etc…)… Si vemos algo raro, habrá que usar la remodelación algebraica que estudiamos en el cálculo de límites y calcularlo de tal modo, del modo tradicional, sin RHB.

4.2. Evaluación de límites mediante la derivación

Ya hemos visto que mediante el cálculo, en general, podemos estudiar cómo las funciones interaccionan con los INPUTS para generar una serie de OUTPUTS.

Veamos algunos ejemplos de cómo se emplean las derivadas para estudiar el comportamiento de fenómenos reales.

1.- Supongamos una plaga que se propaga por el planeta.

Supongamos, además, que la 'cantidad' de plaga es proporcional a la velocidad con que se propaga, es decir y que, por supuesto, está en función del tiempo:

$$f(t) = 'cantidad' de\ plaga. Se\ mide\ en\ gramos$$

$$f'(t) = velocidad\ de\ propagación\ de\ la\ plaga. Se\ mide\ en\ gramos/segundos$$

Y además decimos que ambas funciones están relacionadas según: $f(t) = f'(t)$

Partamos, ahora, de un punto inicial en el que existe '1 gramo de plaga'.

$$f(0) = 1\ gr$$

Tenemos, pues, una función inicial y, además, conocemos su derivada, pues *f(x)=f'(x)*.

¿Qué función es igual a su derivada? Conocemos esa función: $f(x) = e^t$

Tras 10 segundos, ¿hasta dónde ha crecido la plaga?

$$f(10) = e^{10} \approx 22026\ gr$$

¿Cuánto tiempo tardará en 'ocupar' toda la tierra?

La masa de la tierra es aproximadamente: $6 \cdot 10^{27}\ gr$, luego, cuánto tardará??

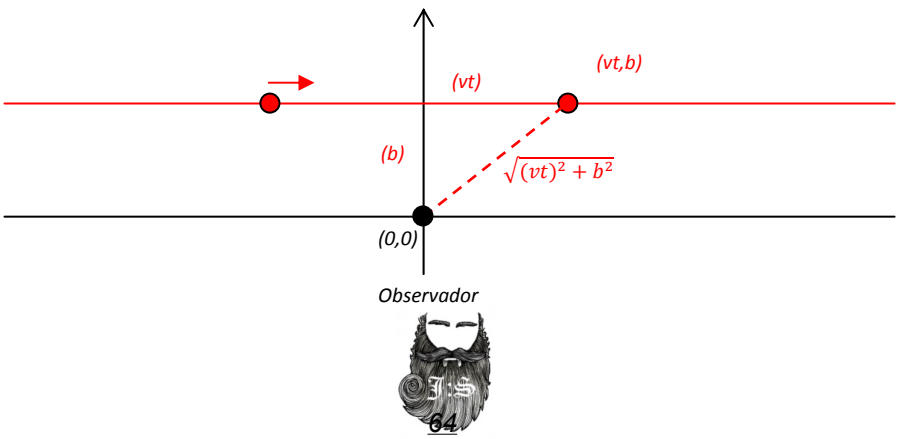
$$f(t) = 6 \cdot 10^{27}\ gr\ ??$$

$$e^t = 6 \cdot 10^{27}\ gr$$

Que es:

$$t = \ln 6 \cdot 10^{27} = (\ln 6 + \ln 10^{27}) = (\ln 6 + 27 \cdot \ln 10) \approx 1.79 + 27 \cdot 2.30 = \mathbf{63.96\ ss}$$

2.- Estudio del desplazamiento de un móvil.



Estudiemos cómo de rápido cambia la distancia entre el observador y el vehículo. Para ello:

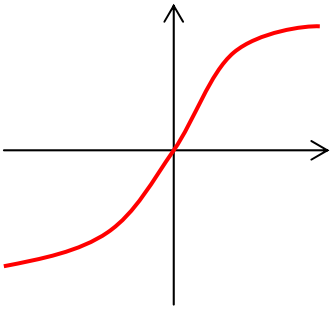
Sobra decir que vt es la posición: velocidad·tiempo

$$\frac{d}{dt}\sqrt{(vt)^2+b^2} = \frac{1}{2\sqrt{(vt)^2+b^2}} \cdot \frac{d}{dt}(vt)^2+b^2$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(vt)^2+b^2}} \cdot 2v^2t + 0 = \frac{v^2t}{\sqrt{(vt)^2+b^2}}$$

Ojo al numerador, la derivación afecta sólo a la 't', por eso la 'v' permanece al cuadrado, como estaba.

Analicemos el problema desde un punto de vista gráfico. He aquí la gráfica de la función derivada:



Observemos que la función es negativa a la izquierda, es decir, cuando el móvil se acerca al observador, cuando la distancia entre observador y móvil DECRECE (la función original decrece).

Después vemos que es positiva (por encima y=0), por lo que sabemos que la distancia está creciendo (en la función original, claro).

3.- Estudio de la modificación de una sombra sobre un muro.

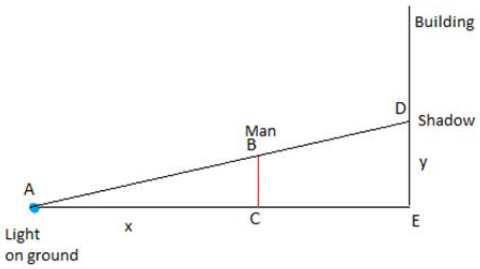
Un punto de luz en el suelo está a 30 pies de un edificio. Un hombre de 4 pies está caminando desde la luz hacia el edificio, proyectando una sombra sobre éste. Camina a una velocidad de 3 pies/segundo.

¿A qué ratio (con qué velocidad) está cambiando la sombra justamente cuando el hombre está a 5 pies del edificio?

A light on the ground is 30 feet away from a building. A 4 foot tall man is walking from the light to the building at a rate of 3 feet per second.
He is casting a shadow on the side of the building. At what rate is his shadow shrinking when he is 5 feet from the building?

Este problema lo resuelven de un modo muy simple… pero a mí no me pareció tan simple en un inicio… porque lo quise complicar demasiado ¿Qué errores de interpretación cometí? Fundamentalmente pensar que sólo cambiaba 'y' y no 'x e y' (ambas) (tampoco me he explicado muy bien).

Supongamos una situación como la que sigue (olvidemos los números, no son de este problema, pero el esquema sirve):



Nota: We aren't comparing triangles from two different pictures (two different times). By similar triangles, we mean compare △ABC with △ADE. These two triangles are similar. All the corresponding angles of the two triangles are congruent. Only the lengths of the sides have been scaled by some common factor.

At any given time △ABC will be similar to △ADE.

∠A is common to both triangles. ∠C=∠E=90◦ and hence ∠B=∠D

If some time passes and the shape of △ABC changes, the shape of △ADE will also change so that both triangles are still similar to each other at every instant.

Qué conocemos del problema:

- Conocemos x=30p (llamemos x a la distancia que recorre el hombre)
- Conocemos la altura del hombre=4p
- Conocemos la velocidad con que el hombre recoge x: 3 p/s, es decir: $\frac{dx}{dt} = 3\ p/s$
- Nos piden: $\frac{dy}{dt}$ cuando x=25p. LEER BIEN!! NO NOS PIDEN EL TAMAÑO DE LA SOMBRA (ESO SE SABE YA! NOS PIDEN LA RATIO DE CAMBIO EN ESE MOMENTO!! **LEER BIEN!! LEER BIEN!!! Y LEER BIEN!!**)

Cuando el hombre camina hacia el edificio las ratios entre los catetos cambia produciendo un triángulo no similar y esto es lo que me volvía un poco loco, pues no se podían comparar ambos triángulos, el del inicio y el del final. Pero la cosa está en no comparar los dos triángulos de tiempos diferentes sino, establecer una relación entre los lados en el primer momento (a) y, después, (b) estudiar cómo han cambiado tanto 'x' como 'y' para, así ver qué clase de triángulo final tenemos.

Nota: poner siempre las unidades!

(a) Por triángulos similares sabemos que:

$$\frac{x}{4p} = \frac{30p}{y}$$

Es decir, lo que 4 es para x (ya veremos cuánto es esa x), para 30 (x total) es y. Naturalmente, si el 4 lo acercáramos al foco, es decir, en vez de ponerlo a 25 metros lo pusiéramos a 10 metros, la y, lógicamente, sería diferente. El cuatro es constante. La 'y', la sombra, cambiará según la distancia 'del 4' al foco.

Estudiemos, pues, el cambio de esas proporciones que (ojo, y he aquí la clave) no tienen por qué cambiar de manera homogénea, como veremos, cuando derivemos, cada lado se derivará de un modo diferente. Es decir, x cambiará una cantidad pero 'y' no tiene por qué cambiar de manera proporcional, sino que lo hará según el modo en que el algoritmo de la función derivada prediga. Derivemos a ambos lados (naturalmente respecto al 'tiempo'). Estudiemos que tipo de cambio se da en cada lado de la ecuación, hacia qué tipo de triángulo evoluciona el triángulo inicial:

$$\frac{d}{dt}\frac{x}{4p} = \frac{d}{dt}\frac{30p}{y}$$

Recordemos la regla de la cadena: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{-1}{f(x)^2}\cdot f'(x)$

$$\frac{1}{4p}\frac{dx}{dt} = 30p\frac{d}{dt}\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{1}{4p}\frac{dx}{dt} = 30p\frac{-1}{y^2}\frac{dy}{dt}$$

De donde (recordemos que no nos piden la altura de la sombra, sino la velocidad con que ésta se encoge cuando x=25):

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-y^2}{30p\cdot 4p}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-y^2}{30p\cdot 4p}\cdot 3p/s$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-y^2}{120p^2}\cdot 3p/s = -y^2\cdot\frac{1}{40}ps$$

Esto nos está diciendo, en otras palabras, que la ratio de cambio de y en un momento t determinado es 1/40 veces su propia altura en ese momento.

¿Cuánto mide su sombra cuando x=25? Tiraremos de la proporción que ya vimos antes por semejanza entre triángulos:

$$\frac{x}{4p} = \frac{30p}{y}$$

$$\frac{25p}{4p} = \frac{30p}{y}$$

$$y = \frac{120p^2}{25p} = \frac{120}{25}p$$

Así, sabiendo esa altura en ese momento, ya podemos ver la 'cantidad', la tendencia a encogerse, en ese punto, de la sombra.

(b)

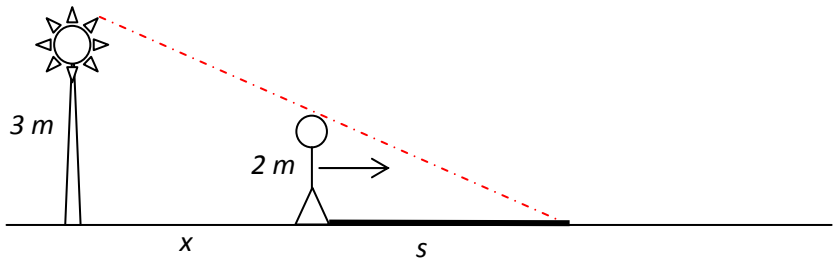
$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{120}{25}\right)^2 p \cdot \frac{1}{40} ps$$

De donde concluimos que:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = 0.576\ p/s}$$

4.- Estudio de la modificación de una sombra de una persona que se aleja de un punto de luz.

Supongamos esta situación:



Ahora convirtamos esta situación en una ecuación mediante la aplicación de triángulos similares.

$$\frac{x+s}{3} = \frac{s}{2}$$

Ya tenemos la ecuación, ahora **derivemos**… pero… ¿en función de qué? Típico error inmediato: dejar 's' en función de 'x' y derivaría en función de 'x', es decir, vería cómo afecta a 's' los cambios en 'x'.

Lo que hay que hacer es ponerlo todo en función de alguna variable, por ejemplo, el tiempo (t), de manera que:

$$\frac{x(t)+s(t)}{3} = \frac{s(t)}{2}$$

Ahora derivemos a ambos lados:

$$\frac{d}{dt}\frac{x(t)+s(t)}{3} = \frac{d}{dt}\frac{s(t)}{2}$$

$$\frac{1}{3}\left(x'(t)+s'(t)\right) = \frac{1}{2}s'(t)$$

$$\frac{1}{3}x'(t) = \frac{1}{6}s'(t)$$

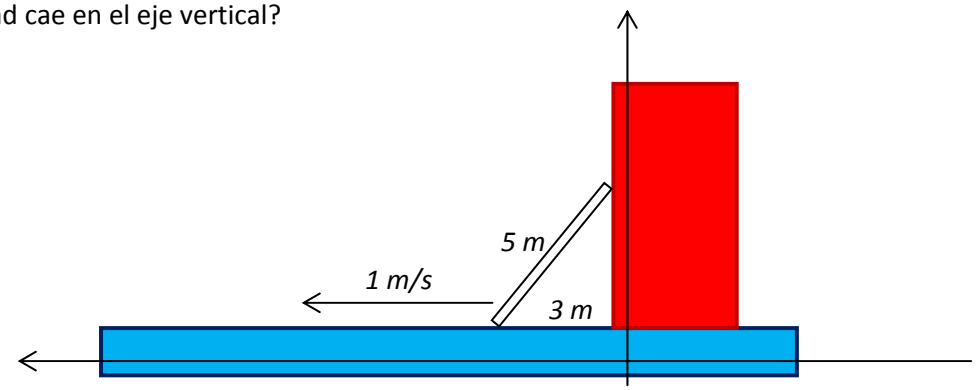
De donde podemos concluir que la ratio de cambio de la sombra respecto al tiempo es igual a:

$$s'(t) = 2x'(t)$$

Es decir, la velocidad de cambio de la sombra es igual a dos veces la velocidad de cambio de posición de la persona. La velocidad de la sombra es dos veces la velocidad de la persona.

5.- Estudio de la caída de una escalera.

Analicemos esta situación: una escalera apoyada en una pared y que se desliza. ¿A qué velocidad cae en el eje vertical?



Los cuatro pasos fundamentales de un problema son:

1) Hacer un dibujo esquemático

2) Buscar una ecuación

3) Derivar

4) Evaluar los resultados

Ya hemos realizado **(1).**

Vamos a por **(2),** la ecuación. Queremos conocer algo que sucede en el eje 'y':

Por Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

Reordenemos:

$$x^2 - 5^2 = -y^2$$

Sabemos que ambas magnitudes cambian en virtud del tiempo transcurrido:

$$x^2(t) - 5^2 = -y^2(t)$$

Ahora derivemos **(3)**:

$$\frac{d}{dt}x^2(t) - \frac{d}{dt}5^2 = \frac{d}{dt} - y^2(t)$$

$$= 2x(t) \cdot \frac{dx}{dt} - 0 = (-1) \cdot 2y(t) \cdot \frac{dy}{dt}$$

Nota: por qué derivo y sigo dejando $\frac{dx}{dt}$? Porque he de pensar que dentro de la x hay algo y aplicar la regla de la cadena. Si no hay nada, sólo x, pues quedará 1 y se eliminará… En realidad hay que plantearlo como un operador: $\frac{d}{dt}$, actúa sobre una función y, 'cuando la traspasa', deja a la función ya derivada y queda derivando sólo al elemento primigenio: 'x' o 'y'. Naturalmente se aplica la regla de la cadena: la derivada de lo de fuera por la derivada de lo de dentro.

Ahora, aportemos la solución **(4)**. Como conocemos dx/dt (la velocidad en x) y x (posición en x), sustituimos:

$$2 \cdot 3 \cdot 1 = (-1) \cdot 2y(t) \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$6 = (-1) \cdot 2y(t) \cdot \frac{dy}{dt}$$

Por Pitágoras también podemos conocer 'y':

$$y^2 = 5^2 - x^2$$

$$y^2 = 5^2 - 3^2$$

$$y^2 = 25 - 9$$

$$y = \sqrt{16} = 4$$

Por lo que, sustituyendo:

$$6 = (-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{dy}{dt}$$

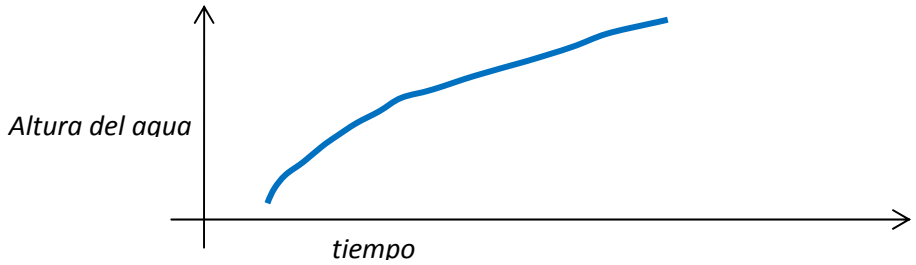
$$\frac{6}{-8} = \frac{dy}{dt}$$

$$-0.75 = \frac{dy}{dt}$$

Es decir, la velocidad de caída de la parte de arriba de la escalera es de -0.75 m/s ($\frac{dy(metros)}{dt(segundos)}$) (negativo, pues va para abajo en el eje vertical, la altura '4' está decreciendo).

6. ¿Cuánto tarda en llenarse un recipiente de agua?

Si tomáramos medidas y las anotáramos podríamos construir una gráfica:



A simple vista podemos observar que al inicio el crecimiento en altura es más rápido que al final. Ello, naturalmente, y suponiendo un volumen de agua entrante constante, implica que el volumen del bowl no es homogéneo. Es más estrecho por abajo que por arriba, por eso el nivel del agua sube más lentamente.

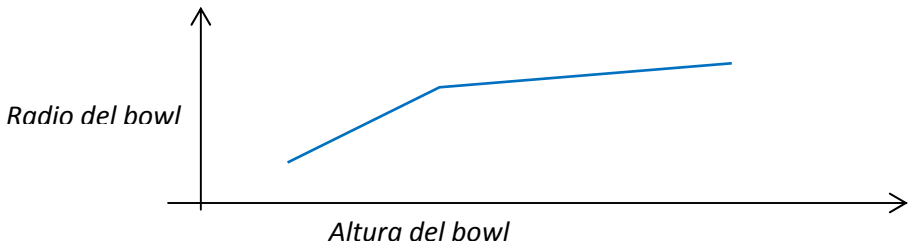
Es decir, tenemos:

$$\frac{dV}{dt}\ constante\ (volumen\ de\ agua\ constante)$$

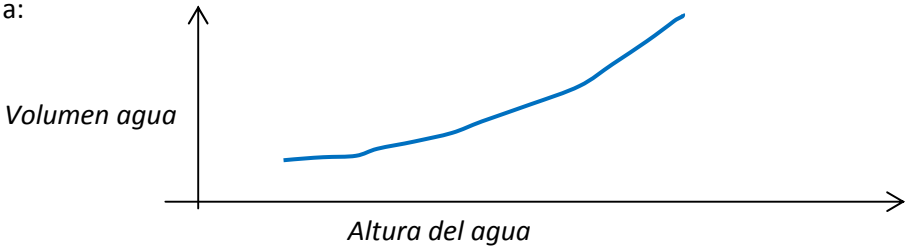
$$\frac{dh}{dt}\ ratio\ grande\ al\ inicio$$

$$\frac{dh}{dt}\ ratio\ menor\ al\ final$$

Hagamos un gráfico de la 'evolución' del radio del bowl.

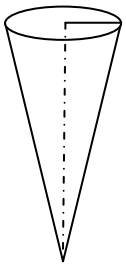


Así, conociendo el radio en una particular altura del bowl, podré calcular el volumen acumulado de agua en el bowl para una altura determinada y que, gráficamente, sería algo parecido a:



Vemos, fácilmente, que la pendiente en los puntos iniciales es diferente a la de los puntos del final.

6.1 Supongamos ahora un cono:



Perímetro de la base: $\boldsymbol{6\pi\ cms}$
Hipotenusa: $\boldsymbol{\sqrt{90}\ cms}$
Conociendo estos datos podemos saber que:
*R=**3 cms***
*H=**9 cms***

Si le introducimos agua a una velocidad constante de 1 ml/s ($\frac{d}{dt}V(t)$), ¿A qué velocidad (**ratio** de cambio) está subiendo el agua justo cuando tiene dentro ya π ml de agua?

Debemos saber que el volumen de un cono es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Además, los valores cambiantes, deben cambiar en función de una variable independiente: el tiempo:

$$V(t) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2(t) \cdot h(t)$$

Tenemos un problema: la ecuación está en función de dos variables: r y h. Sin embargo, deus exmachina, observamos que podemos poner el radio en función de la altura al ver entre ambas magnitudes de este cono concreto una clara relación:

$$r = \frac{h}{3}$$

Ahora podemos reescribir la ecuación en función de una sola variable:

$$V(t) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h(t)}{3}\right)^2 \cdot h(t)$$

$$V(t) = \frac{\pi}{27} h^3(t)$$

Necesitamos conocer la altura a la que está el agua en el cono cuando hay un volumen = π. Así, para ello:

$$\pi = \frac{\pi}{27} h^3$$

$$h = \sqrt[3]{27} = 3$$

Ahora derivemos en función del tiempo:

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}\frac{\pi}{27}h^3(t)$$

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{\pi}{27}3h^2\frac{dh}{dt}$$

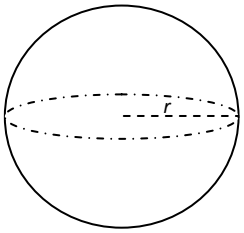
Ahora sustituimos los valores que ya conocemos: h y $\frac{d}{dt}V(t)$

$$1 = \frac{\pi}{27} 27 \frac{dh}{dt}$$

Luego, finalmente, la ratio de cambio de la altura en el momento en que la altura es 3, es decir, en el momento en que el volumen de agua dentro del cono es π, es:

$$\boldsymbol{\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\ cms/s}$$

6.2 Estudiemos ahora el modo en que el radio de un globo cambia según se infla, suponemos, de manera constante:



¿Cómo cambia el radio, a qué velocidad crece, según le introducimos aire?

Debemos saber que el volumen de una esfera es:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Derivemos:

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{d}{dt} r^3(t)$$

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt}$$

Luego:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi r^2}$$

¿Qué quiere decir esto? Que la velocidad de cambio del radio para radios pequeños es muy alta, se producen cambios 'dramáticos', mientras que a radios mayores la velocidad se va moderando. Por eso, cuando inflamos un globo, lo vemos cambiar mucho al principio y poco al final.

7. Imaginemos que para hacer una pompa de chicle lo más grande posible hay que inflarlo de manera que el radio crezca mediante una ratio constante de 18 mm/s. Expresar, como una función del radio, a qué ratio debes soplar (en mm^3/s) para que esto suceda.

Qué conocemos:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dr}{dt} = 18\frac{mm}{s}$$

Queremos ver cómo cambia el volumen, luego derivemos la ecuación del volumen.

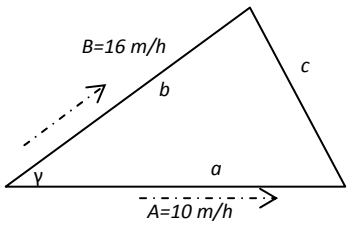
$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{d}{dt}V = \frac{4}{3}\pi 3r^2\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}V = \frac{4}{3}\pi 3r^2 18 = 4\pi 18r^2 = 226.194671058465r^2$$

8. Dos botes parten del mismo punto. El bote A navega hacia el este a una velocidad de 10 millas/hora. El bote B parte hacia el noreste a una velocidad de 16 m/h. El ángulo que forman ambas embarcaciones es de $\frac{\pi}{3}$. ¿A qué velocidad se está incrementando la velocidad de los dos botes cuando llevan dos horas de viaje?

Supongamos el siguiente escenario:



Ojo, en un principio la cagué al pensar que podía ser un ángulo recto de entrada (salí rápido de esta suposición errónea).
Ahora hay un poco de Deus Ex Machina. Usaremos el teorema del coseno. Es cierto que no lo hemos usado, ni hablado de él, hasta el momento, pero también es cierto que es un teorema imprescindible:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

El lado opuesto es la suma del cuadrado de los otros dos lados menos el doble de esos lados por el coseno del ángulo opuesto a 'c'.

Esto nos permite plantear la siguiente ecuación:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Veamos cómo va cambiando esa relación. Para ello vamos a derivar. Ojo, aquí a veces meto la pata y confundo las variables existentes con la variable independiente en función de lo que van a cambiar. Es importante y definitivo tener cuál es la **variable independiente**, en este caso, EL TIEMPO (de momento estamos tratando sólo derivación sobre una sola variable). ¿Y las variables dependientes de la independiente (t)? Todas las demás…

Nos piden la ratio de cambio de c después de 2 horas. Primero identifico todas las magnitudes involucradas para ese momento:

- Las distancias son:

$$a = 10\frac{m}{h}\cdot 2h = 20\ m$$

$$b = 16\frac{m}{h} \cdot 2h = 32\ m$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = \sqrt{20^2 + 32^2 - 2 \cdot 20 \cdot 32 \cdot \cos{}^{\pi}/_{3}} = 28$$

He tenido que calcular 'c' porque la función final va a quedar en función de 'c' en el momento de las 2 horas. Realmente, si sabemos que la velocidad de cambio de c es constante, es decir, su aceleración es = 0, es decir, su velocidad no queda en función del tiempo (no cambia con el tiempo), ya tendríamos la solución del problema: 28 m / 2 h. Sin embargo vamos a proceder mediante lo que nos interesa: el cálculo diferencial.
Derivemos a ambos lados de nuestra ecuación 'matriz':

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\frac{d}{dt}c^2 = \frac{d}{dt}a^2 + \frac{d}{dt}b^2 - \frac{d}{dt}2ab\cos\frac{\pi}{3}$$

¿Por qué no dejamos el ángulo gamma como incógnita y sustituimos ya? Porque no cambia con el tiempo. Si cambiara, entonces otro gallo cantaría.

Por otro lado sabemos que $\cos\frac{\pi}{3} = 1/2$, por lo que podemos decir que:

$$\frac{d}{dt}c^2 = \frac{d}{dt}a^2 + \frac{d}{dt}b^2 - \frac{d}{dt}ab$$

Derivemos y usemos la regla de la cadena (ojo a la derivada de ab!! Es la derivada de un producto!!):

$$2c\frac{dc}{dt} = 2a\frac{da}{dt} + 2b\frac{db}{dt} - (\frac{da}{dt} \cdot b + a \cdot \frac{db}{dt})$$

Ahora despejamos lo que queremos conocer ($\frac{dc}{dt}$) y sustituimos lo que conocemos (las distancias a y b y las velocidades A y B):

$$\frac{dc}{dt} = \frac{2a\frac{da}{dt} + 2b\frac{db}{dt} - (\frac{da}{dt} \cdot b + a \cdot \frac{db}{dt})}{2c}$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10 + 2 \cdot 32 \cdot 16 - (10 \cdot 32 + 20 \cdot 16)}{2 \cdot 28}$$

$$\boldsymbol{\frac{dc}{dt} = 14\ m/s}$$

9. Supongamos un globo que estamos llenando a una ratio de 6 metros cúbicos por día. Cuando el radio de la esfera es de 10 metros, ¿A qué ratio crece su SUPERFICIE?

Para ello hemos de conocer la fórmula de la superficie de una esfera.

Conocemos la fórmula del volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y, vivan las matemáticas!, la fórmula de su superficie es la derivada de la fórmula del volumen: $A = 4\pi r^2$.

Importante: no es baladí que digamos que sólo al final sustituimos!!! Vamos allá:

Sabemos que el volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

¿Cómo cambia el volumen?

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{d}{dt}V = \frac{4}{3}\pi 3r^2\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}V = 4\pi r^2\frac{d}{dt}$$

Conocemos la ratio del cambio de volumen, luego, el ratio de cambio del radio es (en realidad podríamos ya sustituir aquí el radio del momento justo que estamos estudiando…pero parece más bonito dejándolo para el final):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dV/dt}{4\pi r^2}$$

Ahora, estudiemos el cambio del área, pues ya tenemos un valor para el cambio de radio:

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{d}{dt}A = \frac{d}{dt}4\pi r^2$$

$$\frac{d}{dt}A = 4\pi 2r\frac{dr}{dt}$$

Y, como conocemos ya tanto el radio como la ratio de cambio del radio, finalmente sustituimos:

$$\frac{d}{dt}A = 4\pi 2r\frac{dV/dt}{4\pi r^2} = 4\pi\cdot 2\cdot 10\frac{6}{4\pi 10^2} = \mathbf{\frac{6}{5}\,m^2/d}$$

4.3.- Optimización.

Las derivadas, el cálculo, también nos sirve para tomar la mejor de las opciones cuando hay que elegir entre muchas (incluso infinitas) opciones. A esto llamamos optimización.

Esto está muy relacionado con el epígrafe que ya hemos visto acerca de la representación gráfica de funciones. Para ello vamos a recapitulemos y reflexionar un poco sobre los límites y puntos críticos de una función.

Tenemos el teorema del valor extremo según el cual una función, **si es continua**, en un **intervalo cerrado**, siempre tendrá un **máximo** o **un mínimo** (en 'y') dado un dominio (ya hemos dicho intervalo cerrado).

A la hora de estudiar un dominio concreto de una función habremos de atender a todos los hitos que se pueden dar dentro del mismo, esto es:

- **Punto de 'entrada' del intervalo**. Este punto es relevante si es un intervalo cerrado y, por lo tanto, nos da un número 'concreto'. Si es un intervalo abierto, como sabremos, se tratará de una 'frontera difusa', atenuada, y tendremos que estudiar, por tanto, el límite hacia el que va, que puede ser el infinito, o, también, un número concreto, naturalmente, pero de manera 'difusa', 'desenfocada', por lo que no podremos decir que ése sea un punto extremo, al menos, 'concreto'. De hecho, para un dominio cerrado, tendremos que obtener una IMAGEN (en 'y') cerrada. Para un dominio x [a,b], debemos tener una imagen f(x) [f(a),f(b)].
- **Punto de 'salida' del intervalo**. (Mismas apreciaciones que antes).
- **Máximos y/o mínimos locales** (dentro del intervalo) en los que f'(x) = 0 (ojo, estos puntos críticos locales pueden ser, perfectamente, absolutos).
- **Otros puntos 'raros' que veamos.** Por ejemplo, puntos en los que la derivada no esté definida.

Esto, a nada que se piense sobre esto es obvio.

Pensemos en varias funciones para hacernos una idea del tipo de situaciones y lo fácil que es entenderlas:

1- ***f(x)= para un dominio de x = [0,*** ∞***).*** *Es fácil apreciar que la imagen (el rango, el reflejo de esta función en el eje y), tendrá un mínimo=0… pero respecto al máximo… siempre podremos aportar un nuevo número máximo… por lo que: no tiene máximo definido.*

2- ***f(x)= tan x para un dominio de x =*** $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*. Es fácil apreciar que la imagen de esta función es tan grande o tan pequeña como queramos* $(-\infty, +\infty)$ *por lo que tendremos que decir que: NO tiene ni máximo ni mínimos en el dominio (en el segmento) estudiado.*

3- $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}}$ ***en el intervalo*** $(-1, 1)$.

Vamos a estudiar los 'puntos críticos internos'. Para ello, derivemos:

$$f(x) = (x^2 - 1)^{-2}$$

$$f'^{(x)} = -2(x^2 - 1)^{-3} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^3}$$

¿Cuáles son los puntos críticos internos?

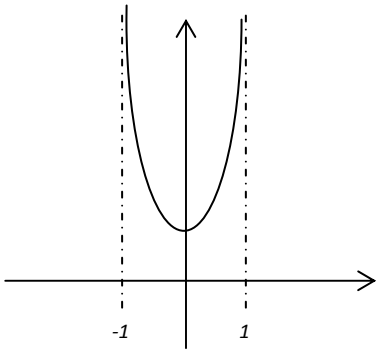
Cuando f'(x)=0, es decir, cuando el numerador es '0' (cuando el que es 0 es el denominador, sencillamente, es que ahí la función no está definida!). En definitiva, el numerador de la función derivada es 0 cuando x=0. Ahí tenemos un punto crítico. Sustituyendo en la función original, en (0,1).

Además vemos que el punto (0,1) es un mínimo porque a su izquierda f'(x) < 0 (decrece) y a su derecha f'(x) > 0 (crece), luego es un mínimo.

¿Tenemos que estudiar los puntos de entrada y salida? No, pues son intervalos abiertos, fronteras difusas, no nos interesa lo que suceda allí porque está 'desenfocado'. En todo caso podremos estudiar sus límites, para conocer el comportamiento en esa zona difusa de manera que:

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \infty; \& \lim_{x\to +1-} f(x) = \infty$$

Es decir, gráficamente:

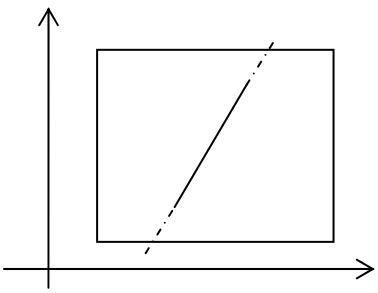


Así, para esta función, podremos decir que, en el intervalo (-1,1) tiene definido un mínimo, pero ningún máximo (a pesar de que sabemos que la función se va muy, muy para arriba…. Pero, como hemos dicho, de manera 'desenfocada', no podremos concretar ninguno, 'coger' uno concreto).

¿Y si estudiamos un dominio diferente de la misma función? Lo que pasa es obvio, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2} \; en\ el\ intervalo\ (1,\infty)$$

Aquí, tendremos que aceptar que no tiene ni máximo ni mínimo, Si hiciéramos un zoom a esa sección del dominio, veríamos algo así:



Es decir, ningún 'hito concreto'. Sin embargo, veamos el comportamiento desde el punto de vista del Cálculo: derivemos:

$$f(x) = (x^2-1)^{-2}$$

$$f'^{(x)} = -2(x^2-1)^{-3} \cdot 2x$$
$$f'^{(x)} = \frac{-4x}{(x^2-1)^3}$$

$f'(1)$ no está definida! … y mucho menos en $f'(\infty)$! De todas formas, toda cautela es poca, miremos los límites en esas fronteras:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty; \& \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

En definitiva: esta función, en el dominio de estudio, no tiene ni máximo ni mínimos definidos.

4- $\boldsymbol{f(x) = x - x^3}$ ***para x*** $\boldsymbol{\epsilon\ [-3,3]}$.

Este caso pinta mejor para que se cumpla en todas sus dimensiones el Teorema de los Valores Extremos. Es continua y derivable en todo el dominio posible (es un polinomio normal y corriente) y nos dan un intervalo cerrado.

Estudiemos los puntos críticos internos. Para ello, derivemos:

$$f(x) = x - x^3$$
$$f'(x) = 1 - 3x^2$$

De donde sacamos los dos puntos críticos internos:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \& \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Para estos valores, tendríamos unos valores en la imagen (recordemos siempre, el punto definitivo lo vemos en la función original, OBVIO) de:

$$f(x_1) \approx 0.38 \quad \& \quad f(x_2) \approx -0.38$$

¿Son estos los valores máximos y/o mínimos en el dominio? Obviamente, no tiene por qué, aún tenemos que mirar en las 'fronteras concretas' que nos han definido en el dominio.

Estudiemos los casos fronterizos: +3 y -3. ¿Cuánto vale en ellos f(x)?

$$\boldsymbol{x_0 = +3 \to f(x_1) = 24} \quad \& \quad \boldsymbol{x_3 = -3 \to f(x_2) = -24}$$

Que, como vemos, son los máximos y mínimos respectivos para el dominio dado.

5- ***También hay que mirar puntos críticos en puntos donde la función no es diferenciable, pues pueden ser un máximo o un mínimo de la función.***

Hagamos un inciso sobre sobre la derivación de funciones con valor absoluto.

Por ejemplo, la función f(x)=|x|. Sabemos no es diferenciable en x = 0, pues hay un cambio 'brusco', una arista. Sin embargo, en x=0 hay un mínimo (obviamente, no es necesario que sea derivable en un punto para que una función 'pase por ese punto'). Digamos que el valor absoluto hace que cuando f(x) intenta ser negativo, traspasar la línea del eje de la x donde y=0, rebote como una imagen especular.

Recordemos continuidad y derivabilidad son condiciones enlazadas no bidireccionalmente. Es decir, para que una función sea derivable debe ser continua pero, claramente, puede ser continua y no derivable, como el caso de f(x)=|x|. La implicación no es bidireccional, como podemos ver gráficamente para f(x)=|x|.

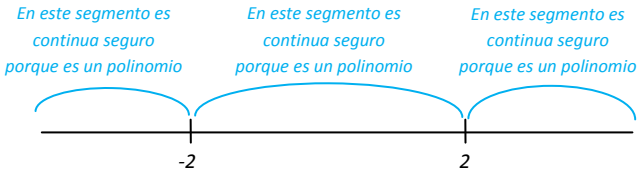
Veamos un ejemplo de función de valor absoluto y estudiemos su continuidad y su derivabilidad. Supongamos la función:

$$f(x) = |x^2 - 4|$$

Las raíces del polinomio inserto entre las barras de valor absoluto son:

$$x = \pm 2$$

Es decir, podemos hacernos una idea básica de su continuidad según el siguiente esquema:



Es decir, podemos afirmar, de entrada, que es continua en todo el dominio R excepto en dos puntos especiales (las raíces) -2 y 2 que tendremos que estudiar con más detalle. No decimos que ahí no sea continua, sino que tenemos que mirarlo.

Por otro lado, recordemos que estamos hablando de una función de valor absoluto, es decir, que devuelve siempre un valor positivo (una distancia). Así, la función tendrá un comportamiento según 'lo de dentro de las barras de valor absoluto' tenga un signo u otro.

¿Qué hará cuando 'lo interno' sea positivo? Lo dejará como está

¿Qué hará cuando lo de dentro sea negativo? Le cambiará el signo.

Ahora, tratemos de definir el comportamiento de la función en todo el dominio posible:

> *a) Así, ¿qué hace la función para valores que están comprendidos en el intervalo $(-\infty, -2]$ y $[2, \infty)$? Como lo interno, para todos estos valores es positivo, la función valor absoluto deja el signo como está (también lo deja 'fijo' cuando es 0).*
>
> *b) ¿Qué hace la función para valores que están en el intervalo (-2,2)? Aporta un valor negativo, es decir, cuando la gráfica 'intenta cruzar a la zona negativa', el valor absoluto se lo va a impedir y haciéndola 'rebotar'… es decir, le cambia el signo.*

¿Qué quiere decir esto? Que tenemos que definir su comportamiento por partes:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \; si \; x \leq -2 \quad \text{ó} \quad x \geq 2 \\ \\ -x^2 + 4 \; si \; -2 < x < 2 \end{cases}$$

Ok. Ya tenemos definida nuestra función para todo el dominio. Ahora tendremos que estudiar los dos puntos críticos, los dos puntos en los que la función se transforma en otra, los puntos de 'metamorfosis' y ver cómo se establecen las 'conexiones' entra las diferentes funciones en esos puntos. Ver si 'conectan', si hay continuidad. ¿Cómo miramos si la función es continua en esos puntos? ¿Cómo sabemos si están conectadas en esos puntos? Simple: Estudiando y comparando los límites de la función por derecha, izquierda y centro.

Continuidad en -2

$$\lim_{x \to -2-} x^2 - 4 = 0 \quad (izda.)$$
$$\lim_{x \to -2+} -x^2 + 4 = -(-2^2) + 4 = 0 \quad (dcha.)$$
$$f(-2) = x^2 - 4 = 0 \quad (centro)$$

Continuidad en 2

$$\lim_{x \to 2-} -x^2 + 4 = 0 \quad (izda.)$$
$$\lim_{x \to 2+} x^2 - 4 = 0 \quad (dcha.)$$
$$f(2) = x^2 - 4 = 0 \quad (centro)$$

Es decir, el límite existe en esos puntos luego, la función es continua, también, en esos puntos críticos.

Ahora estudiemos la derivabilidad.

Derivemos, pues, los dos trozos de funciones en los trozos definidos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \; si \; x \leq -2 \quad \text{ó} \quad x \geq 2 \\ \\ -2x \; si \; -2 < x < 2 \end{cases}$$

Para que algo sea derivable debe ser 'continuo en su derivada', es decir, la función derivada debe ser continua en todos sus puntos. Si no lo es en algún punto, entonces, no es derivable en ese punto. Estudiemos la continuidad de la función derivada:

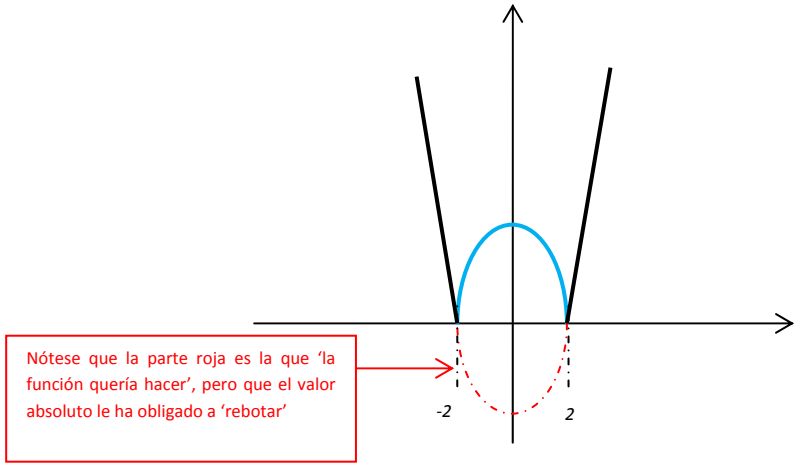
Derivabilidad en -2	Derivabilidad en 2
$\lim_{x\to -2-} 2x = -4 \quad (izda.)$ $\lim_{x\to -2+} -2x = 4 \quad (dcha.)$ Ya vemos que no es derivable	$\lim_{x\to 2-} -2x = -4 \quad (izda.)$ $\lim_{x\to 2+} 2x = 4 \quad (dcha.)$ Ya vemos que no es derivable

Vemos que no es derivable ni en -2 ni en 2, luego tendríamos re redefinir la definición del domino para la derivada, es decir, quitar algún ≤≥ y cambiarlo por < > pues, para x=2 ó x=-2, la derivada no existe. Es decir, lo tendremos que redefinir como:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \; si \;\; x < -2 \quad ó \quad x > 2 \\ \\ -2x \; si \;\; -2 < x < 2 \end{cases}$$

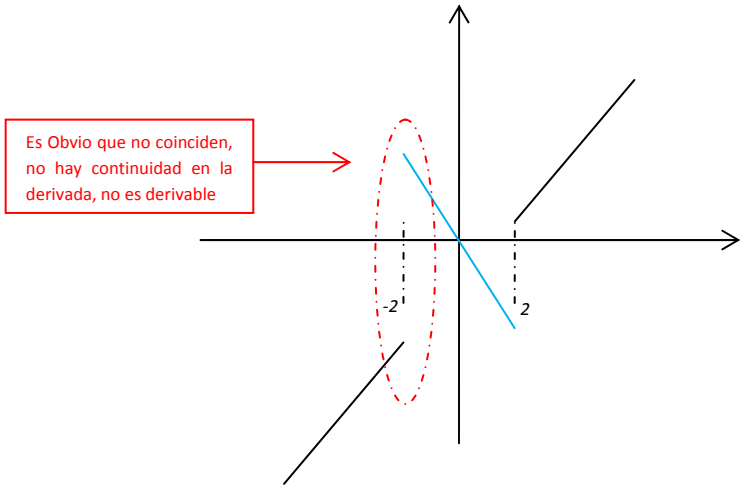
Podemos reflexionar fácilmente sobre esto observando las gráficas tanto de la función como de la función derivada.

f(x)= $x^2 - 4$ *y* $f(x)=-x^2+4$



Nótese que la parte roja es la que 'la función quería hacer', pero que el valor absoluto le ha obligado a 'rebotar'

f'(x)=2x y f'(x)=-2x



Es Obvio que no coinciden, no hay continuidad en la derivada, no es derivable

A la luz de esto, sigamos con el hilo de nuestras reflexiones. Veamos el caso de esta función:

$$f(x) = x - |x^2 - 2x| \quad \forall x \in [0,3]$$

Hemos introducido las barras de valor absoluto para garantizar alguna sección no diferenciable (cambio brusco de orientación, aristas, un 'rebote contra el suelo positivo'). Para derivar esta función tendremos que 'disociarla' en las dos vías posibles:

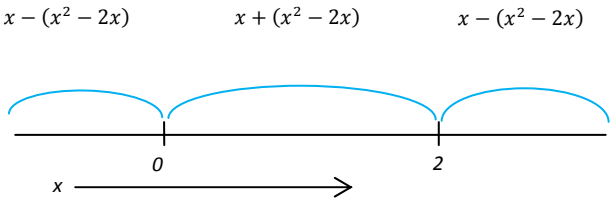
$$f(x) =$$
$$1.\ x - (x^2 - 2x)\ si\ (x^2 - 2x) \geq 0$$
$$2.\ x + (x^2 - 2x)\ si\ (x^2 - 2x) < 0$$

Ya sabemos, por el caso presentado anteriormente, que si el interior del valor absoluto es positivo o cero, el signo previo no cambia. Si su interior es negativo, entonces sí cambia.

Desarrollemos un poco la parte derecha ¿cuáles son los intervalos en que se debe mover x para que se cumpla $(x^2 - 2x) \geq 0$ *ó* $(x^2 - 2x) < 0$ *(sólo nos interesa 'hacer rebotar esta subfunción', que es la que está en términos de valor absoluto)?*
Para ello 'cacemos' los puntos en los que esta 'subfunción' intenta cruzar el eje de la 'x' y debería rebotar, esto es, cuando esa ´subfunción' es = 0. En definitiva, extraigamos sus raíces x=0 y x=2. Ahora, a nada que pensemos en las propiedades del valor absoluto sabremos que podemos reescribir las condiciones $(x^2 - 2x) \geq 0$ *ó* $(x^2 - 2x) < 0$ *como:*

$$1.\ x - (x^2 - 2x)\ si\ x \leq 0\ \text{ó}\ x \geq 2$$
$$2.\ x + (x^2 - 2x)\ si \quad 0 < x < 2$$

Esto es obvio. En (2) se 'activa' la función en la que la función aportaría un valor negativo. En (1), a cada lado de ese rango central que 'quiere ser negativo', la función es como era, sin tener que activar la 'cláusula valor absoluto'.



Ok. Ahora derivemos ambas vertientes:

$$f'(x) =$$
$$1.\ 1 - (2x - 2)\ si\ x < 0\ \text{ó}\ x > 2$$
$$2.\ 1 + (2x - 2)\ si \quad 0 < x < 2$$

Obsérvese que hemos cambiado en el caso (1.) los $\leq \geq$ *, por < >. ¿Por qué? Porque para el caso en que* $x = 0$ ó $x = 2$ *la función no es diferenciable y, como hemos visto anteriormente, ya sabemos por qué. Porque no hay 'continuidad de la derivada' ni en x=0 ni en x=2. Por eso, sacamos el 0 y el 2 del dominio sobre el que se puede estudiar la derivada. En resumen: en esos puntos críticos, en que la función se metamorfosea, las derivadas de las funciones deberían coincidir… pero no es el caso ni para 0 ni para 2:*

$$1.\ 3 - 2x \quad si\ x = 0 \rightarrow 3$$
$$2.\ 2x - 1\ si\ x = 0 \rightarrow -1$$

No coinciden, ¡y debería coincidir, pues en esos puntos las funciones derivadas se deberían tocar y ser continua! En el resto es normal que los valores para la derivada sean diferentes, pues cada una juega en su terreno, pero en estos puntos de 'contacto' deberían ser iguales para mantener 'la continuidad' de la derivada y, por lo tanto, ser derivable!. Al no ser iguales, no es derivable en x=0.

$$1.\ 3 - 2x \quad si\ x = 2 \rightarrow -1$$
$$2.\ 2x - 1 \quad si\ x \ = 2 \rightarrow 3$$

Tampoco es derivable en x=2.

Por eso tenemos que sacar tanto el 0 como el 2 del dominio de 'lo derivable'. Por eso quitamos el signo igual y dejamos sólo < >.

Prosigamos por donde íbamos:

$$f'(x) =$$
$$1.\ 3 - 2x\ si\ x < 0\ \text{ó}\ x > 2$$
$$2.\ 2x - 1\ si \quad 0 < x < 2$$

Queremos conocer puntos críticos, cambios de tendencia que nos permitan identificar máximos o mínimos en las diferentes zonas. Para ello, tenemos que encontrar puntos con pendiente paralela al eje de la x, es decir: puntos en los que f'(x)=0.
Vemos que estos puntos críticos son:

$$x = \frac{3}{2}\ para\ (1.) \quad \& \quad x = \frac{1}{2}\ para\ (2.)$$

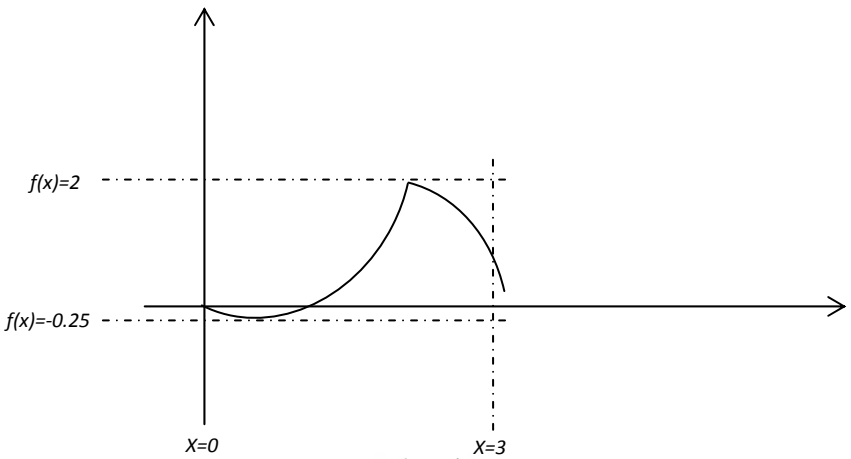
También tenemos que estudiar los puntos en los que la función no era derivable (pues no sabemos qué pasa ahí, y también tendremos que estudiar, como ya hemos hecho en casos anteriores, los puntos de 'entrada y salida' del dominio estudiado. Hagamos mejor una tabla:

$$f(x) =$$
$$1.\ x - (x^2 - 2x)\ si\ x \leq 0\ \text{ó}\ x \geq 2$$
$$2.\ x + (x^2 - 2x)\ si \quad 0 < x < 2$$

Comentario	***x***	***f(x)***
Punto de entrada / Punto no derivable x=0 *(además es un punto no derivable. Estudiándolo matamos dos pájaros de un tiro)*	*0 (en 1.)*	*0*
Punto crítico x=1/2 de subfunción (2.)	*½ (en 2.)*	*-0.25*
Punto crítico x=3/2 de subfunción (1.) *Ni siquiera lo vamos a estudiar porque 3/2 es 1.5, es decir, no está dentro del rango en que esta subfunción (1.) se activa: $x < 0$ ó $x > 2$*	*3/2*	*pasamos*
Punto no derivable x=2	*2 (en 1.)*	*2*
Punto de salida	*3 (en 1.)*	*0*

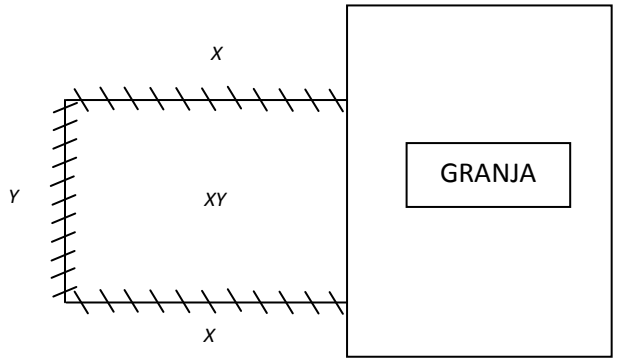
Luego el máximo en el intervalo definido es 2 y el mínimo es -0.25.

Si observamos la gráfica en ese dominio, lo vemos claro:



4.3.1. Un ejemplo de optimización a la hora de hacer un corral para el ganado.

Necesitamos hacer un corral al lado de nuestra granja. Para ello contamos con 52 metros de alambrada. ¿Cuál es la forma óptima en que podemos distribuirlo?



El límite de metros de alambre que tenemos es de 52 metros, luego, a tenor del esquema anterior, podremos decir que:

$$2x + y = 52\ m$$

Así, tengo que maximizar xy estando sujeto a la constricción de que $2x + y = 52\ m$. (y, naturalmente, que ni 'x' ni 'y' sean o 0 o negativos)

De momento sólo estamos estudiando cálculo con una sola variable por lo que pondremos y en función de x:

$$y = 52 - 2x$$

Luego, en la función que tenemos que maximizar quedaría así:

$$f(x) = x(52 - 2x)$$

$$f(x) = 52x - 2x^2$$

Optimicemos buscando puntos máximos y mínimos. Para ello, derivemos:

$$f'(x) = 52 - 4x$$

Esta función es continua y derivable para todo 'x'. Así, el único punto 'especial' que encontraremos es aquél en que f'(x) = 0 , que es el punto en el que la función alcanza un máximo.

$$f'^{(x)} = 52 - 4x = 0$$

$$x = 13$$

Recordemos las condiciones que teníamos:

$$2x + y = 52\ m$$

Es decir, tenemos:

Punto crítico: x=13

Punto de entrada: x=0 (extremo de mínimo gastado en x: nada)

Y punto de salida: que x lo gaste todo siendo 26 (pues, miremos la ecuación, si x=26, con 2·26 gastamos los 52 metros de alambre, es decir, el extremo de máximo gastado en x: todo)

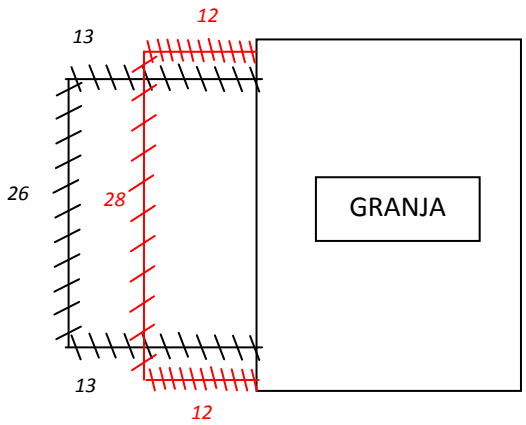
Hagamos una tabla para estudiar los diferentes escenarios bajo nuestras condiciones:

$$2x + y = 52$$

x	y	xy
0	52	0
13	26	338
26	0	0

Así, en verde tenemos la mejor elección (las otras dos son absurdas).

Uno, sin embargo, podría preguntarse, ¿pero por qué no x=12 e y=28? Para entender que la mejor opción es 13, tendremos que ver cómo la modificación en x afecta a la modificación en y. Ahí tendremos la clave para entender que la opción propuesta por la derivada es la mejor, la óptima. En definitiva, ¿por qué, en el siguiente esquema, lo presentado en rojo es peor (siempre me lo he preguntado)?



En la opción roja, a la izquierda, le pierdo a la región negra 26 metros cuadrados (26·(13-12)). Es de suponer que se lo gano por otro lado, en las zonas de arriba u abajo. Pero… ¿qué sale ahí? Magia (sí, un poco magia): que lo que se le gana es (12·1)+(12·1)=24. Es decir, acabo perdiendo, dos metros cuadrados.

De todas formas, a nada que uno piense esto (que al principio, reconozco, me deja to cogío) deja de ser sorprendente. Estamos ante el caso que tenemos un producto de dos números a y

b que suman 6. ¿Cuál es la mejor distribución para que el producto ab sea el máximo? Hay varias posibilidades:

a	b	ab
6	0	0
5	1	5
4	2	8
3	3	9
2	4	8
1	5	5
0	6	0

Pero no sólo el cálculo nos aporta soluciones para este tipo de problemas. Por ejemplo, también podríamos haberlo planteado mediante el método de la desigualdad de la media aritmética y la media geométrica de manera que:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Así, para ese caso-ejemplo último que hemos puesto, el valor óptimo es 3, pues:

$$\frac{3+3}{2} \geq \sqrt{3 \cdot 3} \;\rightarrow\; 3 \geq 3$$

Mientras que para otros casos:

$$\frac{4+2}{2} \geq \sqrt{4 \cdot 2} \;\rightarrow\; 3 \geq 2.83$$

Es decir, siempre será mayor (o igual), la media aritmética en este tipo de problemas.

4.3.2. Cómo de grande puede ser xy para si hay una constricción de x+y=24.

Este problema es exactamente el mismo que el que hemos visto con el corral anteriormente.

Así, como tenemos dos variables (y hasta ahora sólo hacemos cálculo en base a una variable) tendremos que ponerlo todo en función de una sola variable. Para ello usaremos la relación entre variables definida en la constricción, es decir:

$$x + y = 24$$

$$y = 24 - x$$

Ahora podremos estudiar la función que queremos maximizar, pues podremos tenerla en función de una sola variable:

$$f(x) = xy$$

$$f(x) = x(24 - x) \rightarrow 24x - x^2$$

Ahora, sí, procederemos a estudiar su máximo, es decir, en qué momento esa función (que, recordemos, no es otra que 'xy') adopta su valor máximo.

Es un polinomio de lo más corriente, luego es continua y derivable en todos los puntos del dominio $(-\infty, \infty)$. Por ello, no tendremos que atender a puntos en los que no sea derivable, pues estos puntos, sencillamente, no existen. Veamos, entonces, máximos y mínimos mediante los puntos críticos. Para estudiar eso, efectivamente, derivemos:

$$f'(x) = 24 - 2x$$

De donde sabemos que:

$$f'(x) = 0 \quad para\ x = 12$$

¿Es un máximo o un mínimo?

$$f'(x) > 0 \quad para\ x < 12$$

$$f'(x) < 0 \quad para\ x > 12$$

Luego es un máximo.

Qué otros valores tenemos: los puntos de entrada y de salida de la función original:

$$f(x) = 24x - x^2\ para\ x = -\infty \rightarrow \lim_{x \to -\infty} 24x - x^2 = -\infty$$

$$f(x) = 24x - x^2\ para\ x = -\infty \rightarrow \lim_{x \to \infty} 24x - x^2 = -\infty$$

Luego el máximo de la función se produce en x=12.

Como sabemos que $y = 24 - x$, podremos deducir fácilmente que y=12 y, entonces, el mayor 'xy' posible es para:

$$f(x) = xy \rightarrow 12 \cdot 12 = 144$$

4.3.3. Optimizando una lata de conservas.

Cuál es el tamaño óptimo para una lata que contenga $300\pi\ cm^3$, es decir, ¿cuál es la superficie óptima del cilindro que contenga el volumen que nos piden?

Ok. Veamos qué fórmulas desempeñan aquí algún tipo de rol:

$$VOLUMEN\ CILINDRO = \pi r^2 h$$

$$SUPERFICIE\ CILINDRO = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Podríamos tener un cilindro de altura casi 0 y radio gigantesco, una especie de disco… pero eso, como es fácil imaginar, es poco eficiente pues consume una cantidad inmensa de "superficie". También podríamos tener un cilindro de radio casi 0 y altura gigantesca, una especie de hilo inmensamente largo… estamos en las mismas. Es decir, los valores de entrada y salida son absurdos, por lo que no nos van a interesar.

Las funciones que tenemos son polinomios 'de toda la vida' por lo que tampoco nos van a presentar problemas de derivabilidad.

Vayamos, pues, a los puntos críticos de la función derivada.

Como vemos, tenemos dos variables: h y r. Definámoslo todo sólo en función de una. Así:

$$V = \pi r^2 h$$

$$\frac{300\pi}{\pi r^2} = h \rightarrow h = \frac{300}{r^2}$$

Ahora, con esta redefinición, podremos abordar la optimización del área que queremos minimizar para un cilindro con la altura (relativa al radio y al volumen) que hemos definido. Así:

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2 \rightarrow \frac{600\pi}{r} + 2\pi r^2$$

$$\frac{d}{dr}A = \frac{-600\pi}{r^2} + 4\pi r$$

Busquemos el MÍNIMO (pues buscamos el menor radio posible, la menor superficie posible). El mínimo, ya lo sabemos, es un punto crítico de la derivada, por lo que la igualamos a 0:

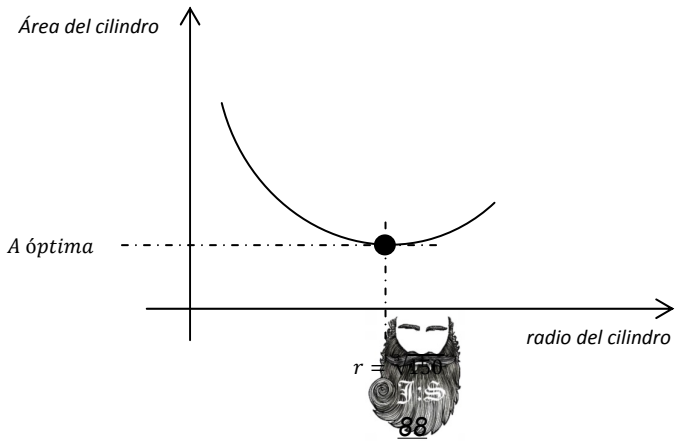
$$\frac{-600\pi}{r^2} + 4\pi r = 0$$

$$4\pi r = \frac{600\pi}{r^2} \rightarrow 4\pi r^3 = 600\pi \rightarrow 4\pi r^3 = 600\pi \rightarrow r^3 = 150$$

$$r = \sqrt[3]{150} \rightarrow A \approx 532\ cm^2$$

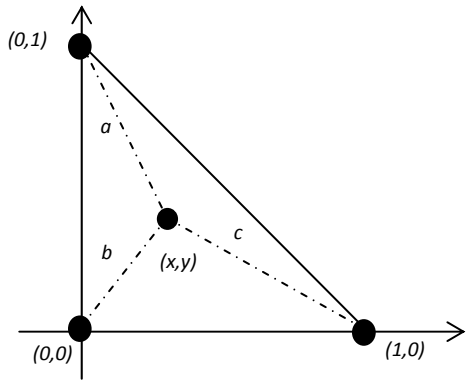
¿Es un mínimo? Sí, porque fácilmente podemos ver que a izquierda decrece y a derecha crece.

Así, ya con nuestro mínimo, despejando en las dos fórmulas principales, obtenemos el dato de superficie de la lata que buscamos. Gráficamente estamos en una situación de este estilo:



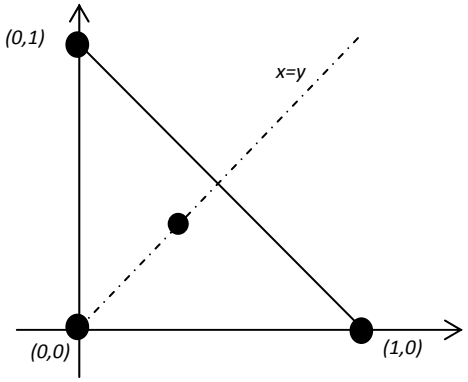
4.3.4. Punto de encuentro más corto entre tres puntos.

Supongamos tres burbujas situadas en los vértices de un triángulo. Busquemos el punto en el que se encontrarán (esto es raro, porque el problema que estamos siguiendo habla del punto donde se encuentran las burbujas cuando, realmente, lo que se encontrarán serán las proyecciones de sus radios…el camino más corto para esto). Para ello supongamos el centro de las esferas en los vértices de este triángulo (vamos a suponer las distancias como la unidad, pues lo que, finalmente nos interesará será el ángulo en que se conectan):



Estamos buscando el 'punto óptimo *(x,y)*'. Es decir buscamos **MINIMIZAR: *a+b+c***

En este problema vamos a tratar con el concepto de simetría. Así, podremos ver que la figura que hemos propuesto es simétrica respecto al eje *x=y*.



Es decir, el punto (x,y) que buscamos, tendrá que estar en algún punto de ese eje de simetría (más o menos intuitivo…aunque no me he parado a pensar mucho en una demostración, sencillamente me parece obvio).

Para estar en ese punto, siendo la función *y=x*, la coordenada será *(x,x)*.

Ahora, mirando la posición del punto (y sabiendo que la distancia entre los puntos (en los catetos) es = 1, por Pitágoras, podremos decir, obviamente, que:

$$f(x) = (a) + (b) + (c) \rightarrow (\sqrt{x^2 + x^2}) + (\sqrt{(1-x)^2 + x^2}) + (\sqrt{x^2 + (1-x)^2})$$

Ahora, mediante un poco de álgebra, podríamos simplificar esta función:

$$f(x) = (\sqrt{x^2 + x^2}) + (\sqrt{(1-x)^2 + x^2}) + (\sqrt{x^2 + (1-x)^2})$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2} + 2\sqrt{(1-x)^2 + x^2}$$

Suponiendo que x≥ 0, podremos seguir simplificando:

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot x + 2\sqrt{(1-x)^2 + x^2}$$

Tenemos, pues, una función en función de una sola variable. Derivemos:

$$f'(x) = \sqrt{2} + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^2 + x^2}} \cdot (2(1-x)(-1) + 2x)$$

La función es derivable en todo el dominio existente. Así que vamos a buscar puntos críticos, sólo, en la derivada:

$$f'(x) = 0$$

$$\sqrt{2} + \frac{4x-2}{\sqrt{(1-x)^2 + x^2}} = 0$$

$$\frac{4x-2}{\sqrt{(1-x)^2 + x^2}} = -\sqrt{2}$$

$$4x - 2 = -\sqrt{2}(\sqrt{(1-x)^2 + x^2})$$

Elevemos al cuadrado ambos lados:

$$16x^2 - 16x + 4 = 2((1-x)^2 + x^2)$$

$$16x^2 - 16x + 4 = 2 - 4x + 4x^2$$

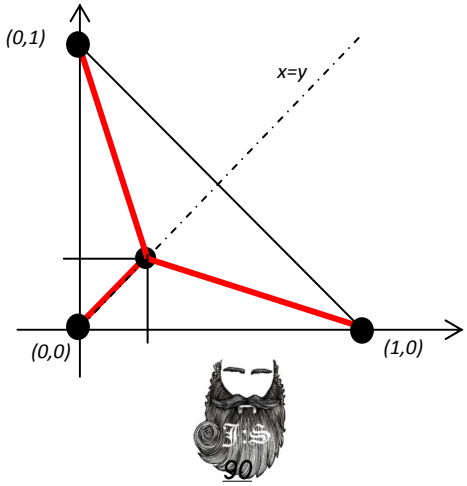
$$12x^2 - 12 + 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Tenemos estas dos soluciones, pero la única que nos es válida (pensar sobre ello) es la de signo negativo:

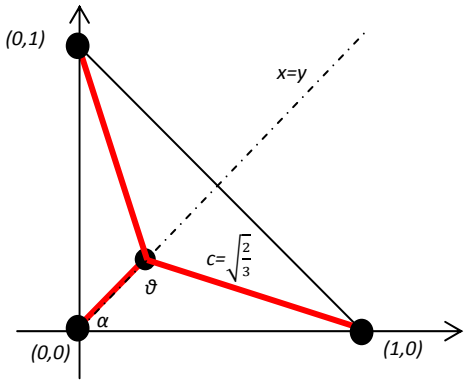
$$x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Llevemos ahora este punto crítico a nuestro diagrama:



Pero, recordemos, estábamos en una situación genérica, imaginaria, en la que las distancias de los catetos del triángulo que formaban las esferas eran igual a 1. Para tener algo más concreto, aplicable a todo escenario posible, lo que tendríamos que conocer es el ángulo que forman las distancias.

Conocemos las distancias genéricas, así, para nuestro diagrama:



Conocemos el lado c y el ángulo alfa (debe ser 45° forzosamente…el triángulo simétrico en torno a ese eje). Así, por el teorema del seno (un pequeño deus ex machina, aunque es obvio):

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

Podremos decir que:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{\sin\theta}{1}$$

De donde:

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego (siendo θ, obviamente mayor de 90 °):

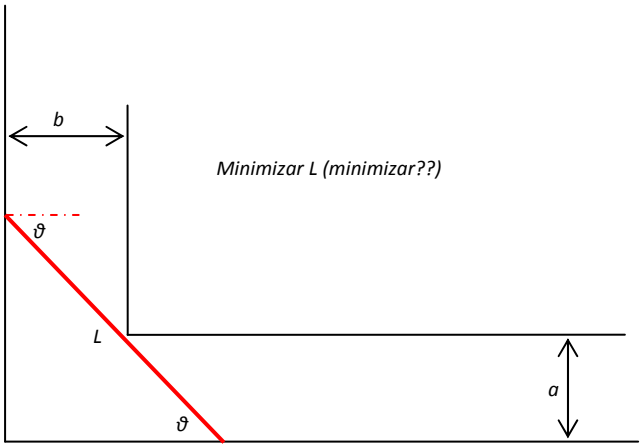
$$\theta=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}=120°$$

Esto, además de para las burbujas, nos va a servir para calcular centroides, centros de gravedad, centro de masa….

4.3.5. Longitud máxima que puede pasar por la esquina de un pasillo (típico de mudar muebles).

Vamos a suponer sólo una línea (no un volumen) para trabajar con una sola variable, una sola dimensión.

Supongamos un esquema de este tipo:



Dividamos la barra en dos segmentos: uno para la parte que queda en el pasillo de ancho 'a' y otra para la parte que queda en el pasillo de ancho 'b'. Así tendremos que:

Lado a) $\sin\theta = \frac{a}{hyp}$, luego $hyp = \frac{a}{\sin\theta} \rightarrow hyp = a \cdot \csc\theta$

Lado b) $hyp = b \cdot \sec\theta$

Luego:

$$L(\theta) = a \cdot \csc\theta + b \cdot \sec\theta$$

Ahora derivamos para buscar la longitud óptima:

$$L'(\theta) = -a \cdot \csc\theta \cot\theta + b \cdot \sec\theta \tan\theta = 0$$

$$a \cdot \csc\theta \cot\theta = b \cdot \sec\theta \tan\theta$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sec\theta \tan\theta}{\csc\theta \cot\theta}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \frac{\sin\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin\theta}{\cos\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos\theta} = \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = \tan^3\theta$$

De donde:

$$\tan\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

Por lo que:

$$\theta = \arctan \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

De donde podemos concluir, sustituyendo en:

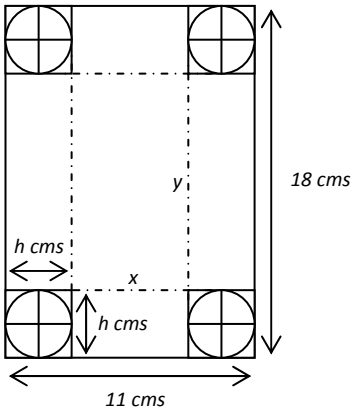
$$L(\theta) = \ a \cdot \csc \theta + \ b \cdot \sec \theta$$

Que:

$$L = \ a \cdot \csc(\arctan \sqrt[3]{\frac{a}{b}}) + \ b \cdot \sec(\arctan \sqrt[3]{\frac{a}{b}})$$

4.3.6. Volumen máximo de una caja (sin tapadera) a partir de un folio de 11 cms·18 cms al que le quitamos 4 cuadrados iguales de cada esquina (y doblamos hacia arriba las 'pestañas' que nos quedan).

Tenemos una situación que responde a este esquema:



Tenemos que el volumen de la caja será:

$$V = x \cdot y \cdot h$$

$$x = 11 \ cms - 2h \ cms$$

$$y = 18 \ cms - 2h \ cms$$

Sustituyendo tenemos que:

$$V(h) = (11 - 2h) \cdot (18 - 2h) \cdot h$$

$$V(h) = 4h^3 - 58h^2 + 198h$$

Tenemos una función en base a una sola variable. Podemos derivar sin problemas. (además, al ser un polinomio, es perfectamente continua y derivable para todo el dominio, por lo que no tendremos que buscar 'hitos' raros).

$$V'(h) = 12h^2 - 116h + 198$$

Tenemos dos raíces:

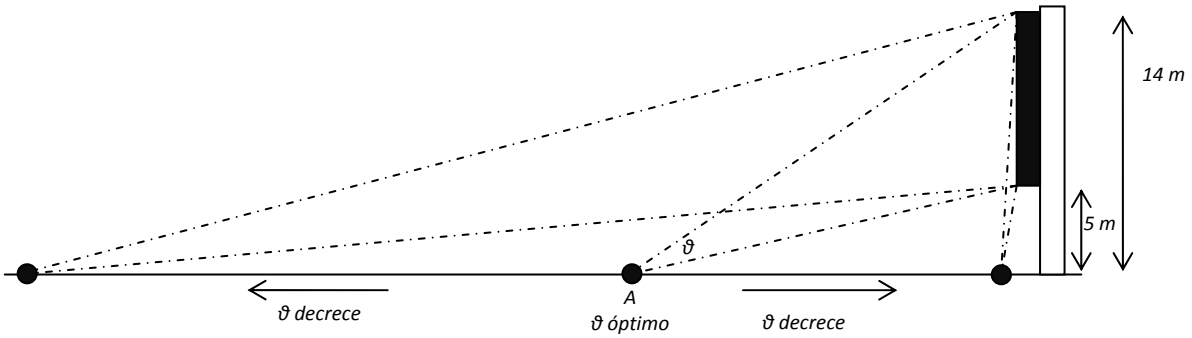
$$h = 2.214 \ldots \ , \quad h = 7.453 \ldots$$

Hagamos una tabla con los valores que queremos estudiar el comportamiento de la función V(h) para los valores de h que tenemos:

h	*V*	*Comentarios*
0	0 cms^3	Obvio
2.214…	197.676 cms^3	Óptima
7.543…	-90…. cms^3	No sirve
11/2	0 cms^3	Obvio

4.3.7. Distancia óptima para ver un cuadro cuya parte de abajo (el marco) está a 5 m sobre la línea de visión y la parte de arriba (marco de arriba) a 14 m de la línea de visión.

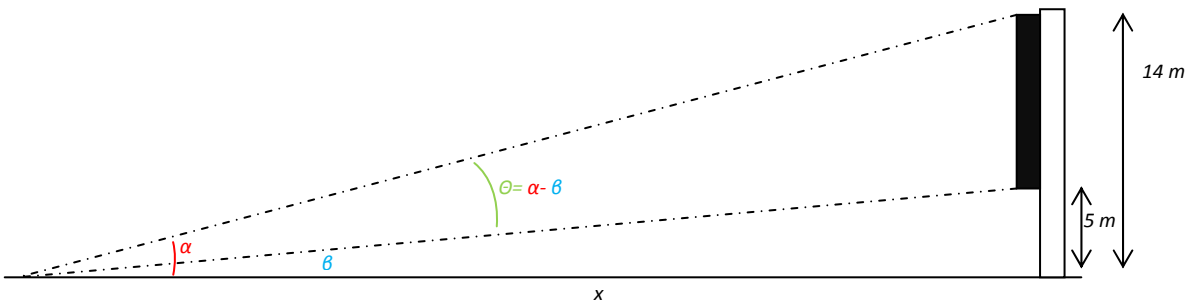
Esto responde a un esquema como el que sigue:



Necesitamos encontrar la distancia del cuadro en la que el ángulo de visión es el máximo posible (al principio, imaginando la situación, no acaba de ver a la primera que el ángulo, a partir de determinado momento alejándose del cuadro, se reducía).

Antes de mirar la solución, inténtalo por ti mismo. Me he llevado unos 30 minutos pensando sobre esto. Un problema que he observado es que no agoto las vías… hay que seguir los diferentes caminos que surgen en un problema hasta el final o, abandonarlos si se tiene seguridad de que no llevan a ninguna parte y no volver una y otra vez si ya se observado rigurosamente que no lleva a ninguna parte. Paciencia y rigor.

Planteémos la situación del siguiente modo:



Hay dos caminos: 1) el que se me ha ocurrido y 2) el que proponen (aunque llego al mismo resultado, es más fácil el segundo, he tirado por el primero por no usar arctan….).

Camino (1)

Veamos todas las magnitudes trigonométricas que están en juego considerando que conocemos la magnitud de los catetos verticales y que comparten la magnitud del cateto horizontal 'x'.

$$\sin\alpha = \frac{14}{hyp} = \frac{14}{\sqrt{14^2 + x^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{hyp} = \frac{x}{\sqrt{14^2 + x^2}}$$

$$\sin\beta = \frac{5}{hyp} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + x^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{x}{hyp} = \frac{x}{\sqrt{5^2 + x^2}}$$

Sabemos que $\Theta = \alpha - \beta$, es decir que (mini deus ex machina):

$$\sin\theta = \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Magnitudes que ya tenemos todo en función de (x):

$$\sin\theta = \frac{14}{\sqrt{14^2 + x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{5^2 + x^2}} - \frac{x}{\sqrt{14^2 + x^2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{5^2 + x^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{14x}{\sqrt{14^2 + x^2} \cdot \sqrt{5^2 + x^2}} - \frac{5x}{\sqrt{14^2 + x^2} \cdot \sqrt{5^2 + x^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{9x}{\sqrt{196 + x^2} \cdot \sqrt{25 + x^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{9x}{\sqrt{(14^2 + x^2) \cdot (5^2 + x^2)}} = \frac{9x}{\sqrt{4900 + 221x^2 + x^4}}$$

$$\sin^2\theta = \frac{81x^2}{4900 + 221x^2 + x^4}$$

Estamos ante una función polinómica continua y derivable en todo su dominio. Busquemos los puntos críticos (aquí es donde esto se enfollona a saco, no es un problema de planteamiento, sino de resolución):

$$f'(x) = \frac{(4900 + 221x^2 + x^4) \cdot 162x - 81x^2 \cdot (442x + 4x^3)}{(4900 + 221x^2 + x^4)^2}$$

$$= \frac{793800x + 35802x^3 + 162x^5 - 35802x^3 - 324x^5}{x^8 + 442x^6 + 58641x^4 + 2165800x^2 + 24010000}$$

$$= \frac{793800x - 162x^5}{x^8 + 442x^6 + 58641x^4 + 2165800x^2 + 24010000}$$

Las únicas soluciones reales son:

$$x = 0, x = -8.366\ldots, x = 8.366\ldots$$

Es decir, el ángulo θ es el mayor posible cuando **x = 8.366…**, que es la distancia que tendremos que alejarnos del muro.

Camino (2)

Realmente se basa en lo mismo, pero usando funciones trigonométricas más apropiadas y simples para este problema.

Mirando el esquema que hemos planteado, y teniendo en cuenta que:

$$\tan\alpha = \frac{14}{x}$$

$$\tan\beta = \frac{5}{x}$$

Sabremos que:

$$\theta = \arctan(\tan\alpha) - \arctan(\tan\beta)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{14}{x}\right) - \arctan\left(\frac{5}{x}\right)$$

Derivemos para ver sus puntos críticos:

$$\frac{d}{dx}\theta = \frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{14}{x}\right) - \frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{5}{x}\right)$$

Recordemos la regla para la derivación de la función arcotangente:

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Luego:

$$\frac{d}{dx}\theta = \frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{14}{x}\right)\cdot -\frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{5}{x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\theta = \left(\frac{1}{1+\left(\frac{14}{x}\right)^2}\right)\cdot\left(\frac{-14}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{1+\left(\frac{5}{x}\right)^2}\right)\left(\frac{-5}{x^2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\theta = \left(\frac{5}{5^2+x^2}\right) - \left(\frac{14}{14^2+x^2}\right)$$

Busquemos ahora el punto crítico en esta función derivada. Para ello, sabemos, debe darse:

$$\frac{d}{dx}\theta = \left(\frac{5}{5^2 + x^2}\right) - \left(\frac{14}{14^2 + x^2}\right) = 0$$

$$\frac{5}{5^2 + x^2} = \frac{14}{14^4 + x^2}$$

De donde:

$$5 \cdot (14^2 + x^2) = 14 \cdot (5^2 + x^2)$$

$$980 + 5x^2 = 375 + 14x^2$$

$$x^2 = 70$$

$$\underline{x = \sqrt{70} \approx \mathbf{8.366\ldots}}$$

Como vemos, es exactamente lo mismo que teníamos por el camino (1).

¿Qué lección importante sacar de este ejercicio? Perseverar por el camino que se ha cogido siempre y cuando sea riguroso. Durante varios momentos, al ver la complejidad del polinomio que me salía, estaba tentado por dejar el problema y buscar otra solución. Ello no estaría mal hacerlo, pero antes de dejarlo verificaba si lo que había hecho era riguroso y, al comprobar que lo era, seguí y seguí aunque, reconozco, con poca confianza. Finalmente, me he alegrado de haber seguido por mi camino que, aunque es más complejo, estaba rigurosamente planteado y, por lo tanto, la solución era correcta. Cuando los problemas están bien planteados, aunque parezcan muy complejos, si verificamos que todo está planteado rigurosamente, debemos seguir hasta el final y no ir 'cambiando de bando' cada dos por tres.

4.3.7. Tenemos que encontrar el modo más eficiente de traer la electricidad a una casa que está en el punto del plano (2,0) (todas las unidades en kms). La línea eléctrica sigue la trayectoria definida por la función $\sqrt{16x^2 + 5x + 16}$. El coste del Km de cable es de 400 €.

Aquí he cometido un error del que, en realidad, era consciente. Lo mantuve… digamos… por probar… y no, no coló. Esta actitud poco rigurosa hay que evitarla, no aporta nada. Cuando hablamos de matemáticas no hay atajos. En los atajos uno se acaba perdiendo. El procedimiento que pensé es, 1º, calcular el punto más bajo de la trayectoria del tendido eléctrico y después, 2º, calcular, mediante Pitágoras, las distancia de la casa a ese punto más bajo…. Es cierto que ese punto 'más bajo' se acerca a ser el mejor y que el procedimiento se acerca…perro aquí no estamos hablando de más o menos mejor, sino de 'el mejor'. Así, no. El procedimiento correcto es el siguiente, el que de verdad busca el camino más corto absolutamente seguro es el que sigue.

La ecuación que define la distancia entre el punto de la casa y la trayectoria del tendido eléctrico es la siguiente (por Pitágoras):

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{16x^2 + 5x + 16})^2} \rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 16x^2 + 5x + 16}$$

Para facilitar la resolución de estas operaciones vamos a elevar todo al cuadrado momentáneamente (no olvidemos, al final, deshacer este cambio haciendo 'raíz cuadrada'):

$$d^2 = \sqrt{(x-2)^2 + 16x^2 + 5x + 16}^2 \rightarrow (x-2)^2 + 16x^2 + 5x + 16$$

Ahora vamos a buscar el punto mínimo de esta función que define la distancia entre la casa y el tendido eléctrico. Para ello, derivemos:

$$\frac{d}{dx}d^2 = 2(x-2) + 32x + 5 = 0 \rightarrow 2x - 4 + 32x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-1}{34}$$

A nada que miremos (ya no gastaremos más tiempo en comentar esto), vemos que en $x = \frac{-1}{34}$, la función distancia alcanza su punto mínimo. Es decir, la función distancia, original, alcanza su valor mínimo con esta 'x'. Así:

$$d^2 = (x-2)^2 + 16x^2 + 5x + 16$$

$$d^2 = \frac{1359}{68}$$

Recordemos deshacer el 'cuadrado':

$$d = \sqrt{\frac{1359}{68}}$$

Que es la distancia más corta (absolutamente seguro, no como en mi primer intento…) entre la casa y el tendido eléctrico. El coste final, por lo tanto, es:

$$Coste: 400 \cdot \sqrt{\frac{1359}{68}} = 1788.1966 \ldots €$$

4.4. Aproximación Lineal. Métodos de Cálculo.

4.4.1. Método de Euler. Cálculo de magnitudes.

4.4.2. Método de Newton. Extracción de raíces de polinomios.

4.4.1. Método de Euler. Cálculo de magnitudes.

Con las derivadas podemos estudiar perfectamente el comportamiento de una función curva en cualquier punto. De hecho, podemos usarla como mecanismo para realizar cálculos complejos relacionados con funciones curvas o encontrar raíces de polinomios muy complejos. Téngase, para ello, en cuenta que una función curva, en un intervalo en que sea derivable, podemos 'ampliarla' tanto como queramos, casi infinitamente de manera que esa 'curva' se nos a aparecer como una 'recta'. De ahí que llamemos a este capítulo 'aproximación lineal'.

Ya conocemos perfectamente que:

$$\boldsymbol{f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h}$$

Recordemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$h \cdot f'(x) \approx f(x+h) - f(x)$$

Despejamos *f(x+h)* y tenemos que:

$$h \cdot f'(x) + f(x) \approx f(x+h)$$

Que es un método abreviado y muy potente de aproximación a un valor y que, por lo tanto, podemos usar para calcular valores en polinomios muy complicados.

Veamos una aplicación: ¿cuál es el volumen de una cáscara de naranja que tiene un perímetro de 24 cms?

Sabemos que la circunferencia de una esfera es:

$$C = 2\pi r$$

Luego:

$$\frac{12}{\pi} cm = r, con\ el\ radio\ podríamos\ ya\ medir\ el\ volumen\ de\ la\ naranja.$$

Pero nos piden **el volumen que ocupa la cáscara**. La diferencia de volumen cuando a r le quitamos 'h' (el grosor de la cáscara).

Anchura de la cáscara: 0.3 cm

Sabemos que el volumen de la naranja (suponiéndola como una esfera perfecta):

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Y su derivada (¡el área!):

$$\frac{d}{dr}V = 4\pi r^2$$

Lo que buscamos es 'el volumen de cáscara' que hay. Para ello analicemos lo que conocemos:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\cdot h$$

Que podremos escribir, también, como:

$$f(x-h) \approx f(x) - f'(x)\cdot h$$

Es decir:

$$V(x-h)\ es\ decir, el\ volumen\ de\ la\ naranja \text{ sin } cáscara\ es:$$

$$V\left(\frac{12}{\pi} - 0.3\right) = \frac{4}{3}\pi(\frac{12}{\pi})^3 - 4\pi\left(\frac{12}{\pi}\right)^2 \cdot 0.3$$

Es decir:

$$Volumen\ total - Volumen\ cáscara, luego, el\ volumen\ de\ la\ cáscara\ es:$$

$$\approx 4\pi\left(\frac{12}{\pi}\right)^2 \cdot 0.3 \approx 55\ cm^3$$

<u>Veamos ahora un ejemplo de cómo usar el Método de Euler para calcular con determinada precisión un valor. Vamos a aproximarnos al valor de 'e'.</u> Supongamos la función:

$$f(x) = e^x$$

Así, teniendo:

$$f(0) = 1\ (pues\ e^0 = 1)$$

$$¿\ cuánto\ es\ f(1)?$$

Realmente, ya sabemos que $f(1) = e^1$, es decir: $f(1) = e \approx 2.7183$ ….

Sin embargo, con fines didácticos, hagamos una aproximación lineal para ver cómo funciona. Hagamos una primera aproximación churrimangui:

Conocemos $f(0) = 1$ y también sabemos que $f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h$, así que podremos decir que:

$$f(0+1) = f(0) + f'(0) \cdot 1$$

$$f(1) = 1 + 1 \cdot 1 \rightarrow 1 + 1 = 2$$

Que es, aproximadamente, 'e'. ¿Vaya mierda de aproximación, no? Claro, es que hemos cogido una h muy grande. Afinemos un poco más: encadenemos aproximaciones. Lo que vamos a hacer es, siempre, partir de un valor conocido (en este caso *f(0)*) e ir arrastrándolo hacia adelante paulatinamente con distancias más cortas para alcanzar mayor precisión en nuestra aproximación.

$$\mathbf{1}.\, f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + f'(0) \cdot \frac{1}{2} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Como hemos dicho, ahora tenemos otro valor seguro, de referencia, un poco más cerca de 1. Hemos reducido la distancia. Lo que estamos haciendo es ir arrastrando ese 'valor soporte', en las sucesivas iteraciones, hacia adelante, acercándolo al punto destino (en este caso *f(1)*).

Siempre cogeremos el valor anterior seguro y daremos otro pasito hacia el objetivo. Vamos con la siguiente iteración (vamos a sumarle ¼):

$$\mathbf{2}.\, f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = (nuevo\ punto\ de\ referencia) f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(pues\ \frac{d}{dx}e^x = e^x\right) \cdot \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$$

Siguiente paso hasta *f(1)*:

$$\mathbf{3}.\, f\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) + f'\left(\frac{3}{4}\right) \cdot 1/4$$

$$= \frac{15}{8} + \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{75}{32} \approx 2.34375$$

Es decir:

$$f\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) \rightarrow f(1) \approx 2.34375$$

Que, como vemos, empieza a pintar algo mejor…

El caso es que podemos encontrar un patrón que podemos reflejar aquí:

$$f(h) \approx f(0) + f'(0) \cdot h$$

Partimos de un valor conocido: $f(0)$ y le sumamos el producto de la derivada en ese punto conocido por la distancia que nos desplazamos. Es obvio pues tenemos: a) un punto seguro y fijo al que le sumamos b) una distancia multiplicada por la derivada, la ratio de cambio. Es decir, un punto fijo, más un intervalo pequeño 'cambiando como se esperaba que cambiara'.

Ahora nos desplazamos otra vez la distancia 'h' y, naturalmente, cogemos el nuevo asidero seguro que nos ha dejado la iteración anterior:

$$f(h+h) \approx f(h) + f'(h) \cdot h$$

Y así sucesivamente:

$$f(h+h+h) \approx f(2h) + f'(2h) \cdot h$$

Para más precisión se puede coger un punto intermedio entre el punto de evaluación de la función previo y el nuevo. Más fácil verlo aquí:

$$f(h) \approx f(0) + f'\left(\frac{h}{2}\right) \cdot h \ (entre\ 0\ y\ h)$$

$$f(2h) \approx f(h) + f'\left(\frac{3h}{2}\right) \cdot h \ (entre\ h\ y\ 2h)$$

$$f(3h) \approx f(2h) + f'\left(\frac{5h}{2}\right) \cdot h \ (entre\ 2h\ y\ 3h)$$

¿Por qué esto es más preciso? Muy simple porque al punto fijo y concreto que tenemos (a) le sumamos una segunda parte en la que multiplicamos la distancia por la ratio de cambio en un punto intermedio entre el punto fijo y el nuevo punto al que tendemos en nuestro estudio. Al coger la ratio de cambio, no del punto asidero, sino de la mitad del intervalo, estamos cogiendo una especie de ratio de cambio medio que, seguro, será más preciso que coger la ratio de cambio que se define en el punto fijo asidero.

Veamos otro ejemplo del Método de Euler. ¿Por qué $\log_2 3 \approx \frac{19}{12}$?

Ok. Para proceder vamos a basarnos en el punto asidero: $\ln 1 = 0$. Sí, vamos a estudiar $\log_2 3 \approx \frac{19}{12}$, pero para llegar a estudiar esto vamos a trabajar desde el punto asidero de un logaritmo natural. Es decir, primero vamos a ir desde $\ln 1 = 0$ a $\ln 2$ $y\ después\ a \ln 3$ pues mediante ellos podremos llegar a nuestro destino ya que sabemos que $\frac{\ln a}{\ln b} = \log_b a$.

Así, vamos a acercarnos desde ln 1 a ln 2 mediante cuatro saltos d ¼ cada uno:

$$1.\, ln(1+\frac{1}{4}) \approx ln\, 1 + \frac{1}{1+{}^{1}/_{8^*}} \cdot \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{9}$$

*Nota *: Nótese que estamos realizando la derivación sobre el punto intermedio entre el 'punto asidero' y el punto destino de esta iteración. Nótese, también que la derivada de lnx=$\frac{1}{x}$, luego: d/dx ln (1+1/4)=$\frac{1}{1+{}^{1}/_{4}}$. Pero recordemos (en esta misma nota) que estamos evaluando la derivada en un punto intermedio entre el asidero y el destino.*

$$2.\, ln(1+\frac{2}{4}) \approx ln(1+\frac{1}{4}) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+{}^{3}/_{8}} = \frac{2}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{11} = \frac{40}{99}$$

$$3.\, ln(1+\frac{3}{4}) \approx ln(1+\frac{2}{4}) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+{}^{5}/_{8}} = \frac{40}{99} + \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{13} = \frac{718}{1287}$$

$$4.\, ln(2) \approx ln(1+\frac{3}{4}) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+{}^{7}/_{8}} = \frac{718}{1287} + \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{15} = \frac{4448}{6435} \approx \mathbf{0.691} \ldots$$

Ya tenemos una aproximación para *ln 2*. Tenemos este nuevo asidero, sigamos.

Ahora vamos a por *ln 3* (vamos a resumir un poco para ahorrar tiempo…, vamos a dar un salto de tamaño = 1). Sabemos que:

$$4.\, ln(2+1) = \ln(3) \approx ln(2) + \frac{1}{2+{}^{1}/_{2}} \cdot 1 = \frac{4448}{6435} + \frac{2}{5} = \frac{7022}{6435} \approx \mathbf{1.0912}$$

Ya tenemos que *ln 2* y *ln 3*. Ahora podremos evaluar:

$$\frac{\ln 3}{\ln 2}, que\ es\ lo\ mismo\ que \log_2 3$$

Así:

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx \frac{7022}{6435} \Big/ \frac{4448}{6435} \approx \frac{3511}{2224} \approx 1.5787 \ldots \approx 1.58$$

Nos preguntaban ¿por qué $\log_2 3 \approx \frac{19}{12}$?

Ok, vemos que $\frac{19}{12} = 1.58333 \ldots \ldots \approx 1.58$

Es decir, resolviendo la pregunta inicial: por qué $\log_2 3 \approx \frac{19}{12}$, hemos visto que, para obtener 3 elevando 2 a un número, éste ha de ser ≈ 1.58. Es decir:

$$2^{1.58} \approx 3$$

Otro ejemplo de aproximación lineal mediante el Método de Euler: estudiamos la función cuya derivada es: $f'(x) = 0.5x + 0.5f(x)$ y $f(0) = 2$. Damos saltos de ½. Buscamos f(2)=¿?.

$$1.\, f(0.5) = 2 + \big((0.5 \cdot 0) + (0.5 \cdot 2)\big) \cdot \frac{1}{2} = 2.5$$

$$2.\, f(1) = 2.5 + \big((0.5 \cdot 0.5) + (0.5 \cdot 2.5)\big) \cdot \frac{1}{2} = 3.25$$

$$3.\, f(1.5) = 3.25 + \big((0.5 \cdot 1) + (0.5 \cdot 3.25)\big) \cdot \frac{1}{2} = 4.3125$$

$$4.\, f(2) = 4.3125 + \big((0.5 \cdot 1.5) + (0.5 \cdot 4.3125)\big) \cdot \frac{1}{2} = 5.765625$$

Otro ejemplo de aproximación lineal mediante el Método de Euler: estudiamos la función cuya derivada es: $f'(x) = 1x - 1f(x)$ y $f(1) = 2$. Damos saltos de ½. Buscamos *f(3)=¿?.*

$$1.\, f(1.5) = 2 + \left(\left((1 \cdot 1) - (1 \cdot 2)\right) \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.5$$

$$2.\, f(2) = 1.5 + \left(\left((1 \cdot 1.5) - (1 \cdot 1.5)\right) \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.5$$

$$3.\, f(2.5) = 1.5 + \left(\left((1 \cdot 2) - (1 \cdot 1.5)\right) \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.75$$

$$4.\, f(3) = 1.75 + \left(\left((1 \cdot 2.5) - (1 \cdot 1.75)\right) \cdot \frac{1}{2}\right) = 2.125$$

Otro ejemplo de aproximación lineal mediante el Método de Euler: estudiamos la función cuya derivada es: $f'(x) = -0.5x + 0.5f(x)$ y $f(-2) = -2$. Damos saltos de ½. Buscamos *f(0)=¿?.*

$$1.\, f(-1.5) = -2 + \left(\left((-0.5 \cdot (-2)) + (0.5 \cdot (-2))\right) \cdot \frac{1}{2}\right) = -2$$

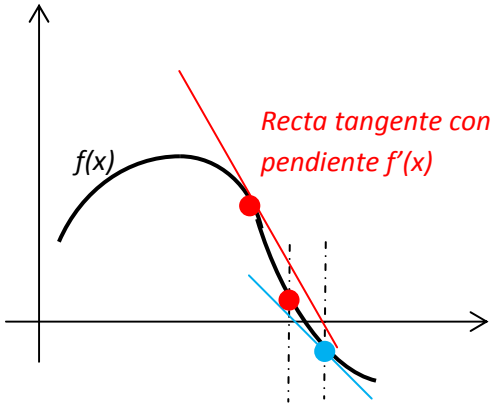
$$2.\, f(-1) = -2 + \left(\left((-0.5 \cdot (-1.5)) + (0.5 \cdot (-2))\right) \cdot \frac{1}{2}\right) = -2.125$$

$$3.\, f(-0.5) = -2.125 + \left(\left((-0.5 \cdot (-1)) + (0.5 \cdot (-2.125))\right) \cdot \frac{1}{2}\right) = -2.40625$$

$$4.\, f(0) = -2.40625 + \left(\left((-0.5 \cdot (-0.5)) + (0.5 \cdot (-2.40625))\right) \cdot \frac{1}{2}\right) = -2.8828125$$

4.4.2. Método de Newton. Extracción de raíces de polinomios.

El método de Newton permite (ojo, no siempre) extraer raíces de polinomios de un modo 'simplificado'. Tenemos métodos para extraer de manera simple las raíces de un polinomio de exponente 1, una fórmula simple para extraer raíces de polinomios cuadrátricos, también hay alguna (bastante más compleja) para extraer raíces de polinomios cúbicos, … pero es que no tenemos más fórmulas para exponentes mayores… Ahí el método de Newton (cuando es aplicable) nos resuelve aporta un método para la identificación de las raíces de polinomios. Gráficamente, el método de Newton, viene a hacer algo parecido a lo que presentamos:



Es de suponer (excepto casos) la recta tangente a una curva (del tipo como el que se presenta) cortará al eje de la x en un punto cercano al punto en que lo corta la propia función. No es necesario expresar que se trata de una aproximación y no es sino un método que nos puede servir cuando necesitamos conocer raíces aproximadas de polinomios de grados muy elevados.

Observamos que alternando el cálculo de rectas tangentes entre los puntos rojos y azules, tendremos que acercarnos, necesariamente, al punto en el que la función original corta al eje de las x, es decir donde *f(x)=0*.

Calculemos, pues las rectas tangentes en esos puntos. Sabemos que:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Queremos que y sea = 0, así que:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$-f(x_0) = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0$$

$$f'(x_0)x_0 - f(x_0) = f'(x_0)x$$

Asumiendo que la derivada en x_0 no es = 0 (es decir, $f'(x_0) \neq 0$), entonces:

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

Así, partiendo de un x_0 hemos llegado a un nuevo x_1. Podremos ir iterando hasta acercarnos tanto como podamos. Así, haremos:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

…

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Veámoslo en acción:

$$f(x) = x^5 + x^2 - 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 2x$$

Suponiendo un primer $x_0 = 1$:

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1^5 + 1^2 - 1}{5 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

¿Hace esta supuesta raíz que $f\left(\frac{6}{7}\right) = 0$?No, pero se acerca más a 0 que f(1).

Volviendo a iterar nos iremos aproximando.

Veamos un ejemplo típico. Para la función $\boldsymbol{f(x) = -7x^5 - 6x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 2}$, sabemos que f(0)=2 y f(2)=-286. Por el teorema del valor medio (y sabiendo que la función es continua en todo su dominio) podemos saber que en algún punto corta, seguro, al eje x. Partiendo de $\boldsymbol{x_0 = 0}$, calculemos por el método de Newton $\boldsymbol{x_2}$.

Tenemos:

$$f(x) = -7x^5 - 6x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 2$$

Por lo tanto:

$$f'(x) = -35x^4 - 24x^3 + 3x^2 + 8x + 4$$

Ahora vamos a por las iteraciones:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \to 0 - \frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \left(\frac{-7\left(-\frac{1}{2}\right)^5 - 6\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 2}{-35\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 24\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(-\frac{1}{2}\right) + 4} \right) = -\frac{24}{25}$$

Veamos otro ejemplo. Para la función $f(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 6x - 6$, sabemos que f(2)=-10 y f(4)=178. Por el teorema del valor medio (y sabiendo que la función es continua en todo su dominio) podemos saber que en algún punto corta, seguro, al eje x. Partiendo de $x_0 = 2$, calculemos por el método de Newton x_2.

Tenemos:

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 6x - 6$$

Por lo tanto:

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 - 9x^2 + 12x + 6$$

Ahora vamos a por las iteraciones:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \to 2 - \frac{(2)^5 - 3\cdot(2)^4 - 3\cdot(2)^3 + 6\cdot(2)^2 + 6\cdot(2) - 6}{5\cdot(2)^4 - 12\cdot(2)^3 - 9\cdot(2)^2 + 12\cdot(2) + 6} = \frac{17}{11}$$

$$x_2 = \frac{17}{11} - \frac{\left(\frac{17}{11}\right)^5 - 3\cdot\left(\frac{17}{11}\right)^4 - 3\cdot\left(\frac{17}{11}\right)^3 + 6\cdot\left(\frac{17}{11}\right)^2 + 6\cdot\left(\frac{17}{11}\right) - 6}{5\cdot\left(\frac{17}{11}\right)^4 - 12\cdot\left(\frac{17}{11}\right)^3 - 9\cdot\left(\frac{17}{11}\right)^2 + 12\cdot\left(\frac{17}{11}\right) + 6} = \frac{2881729}{2048882} \approx 1.4065$$

Veamos otro ejemplo. Para la función $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$, sabemos que f(-4)=38 y f(-2)=-16. Por el teorema del valor medio (y sabiendo que la función es continua en todo su dominio) podemos saber que en algún punto corta, seguro, al eje x. Partiendo de $x_0 = -4$, calculemos por el método de Newton x_2.

Tenemos:

$$f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

Por lo tanto:

$$f'(x) = -6x^2 - 8x + 5$$

Ahora vamos a por las iteraciones:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \to -4 - \frac{-2\cdot(-4)^3 - 4\cdot(-4)^2 + 5\cdot(-4) - 6}{-6\cdot(-4)^2 - 8\cdot(-4) + 5} = -\frac{198}{59}$$

$$x_2 = -\frac{198}{59} - \frac{-2\cdot\left(-\frac{198}{59}\right)^3 - 4\cdot\left(-\frac{198}{59}\right)^2 + 5\cdot\left(-\frac{198}{59}\right) - 6}{-6\cdot\left(-\frac{198}{59}\right)^2 - 8\cdot\left(-\frac{198}{59}\right) + 5} \approx -3.14\ldots$$

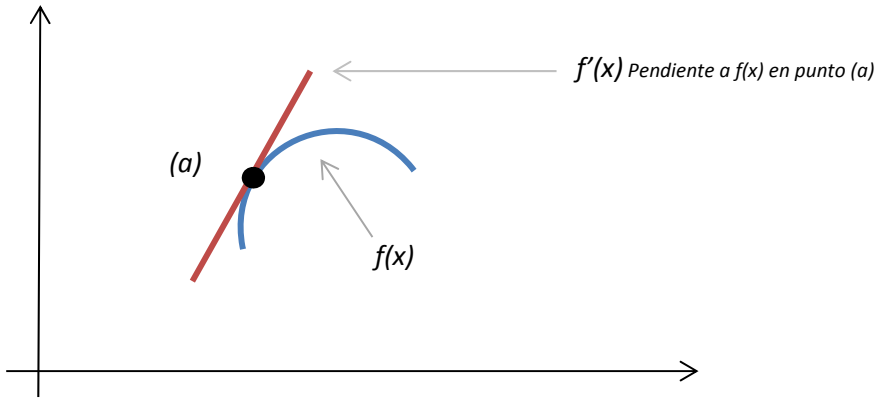
Representación gráfica de funciones.

Este epígrafe lo vamos a tratar como un anexo. Es especialmente simple, pero de utilidad para el bachillerato y, para el caso de que alguien de la familia lo necesite, aquí lo pongo. Vamos a realizar un ejemplo que nos permitirá ver el modo en que se representa gráficamente una función y las estrategias que se siguen. Las estrategias se acompañaran de detalles más extensos para aprovechar y dejar claros los conceptos implicados. Repito siempre: en estos tutoriales trato de buscar el equilibrio entre la longitud y la simplicidad.

BREVE INTRODUCCIÓN

Antes de comenzar con un ejemplo aclaremos sucintamente algunas aplicaciones de las derivadas que se emplearán.

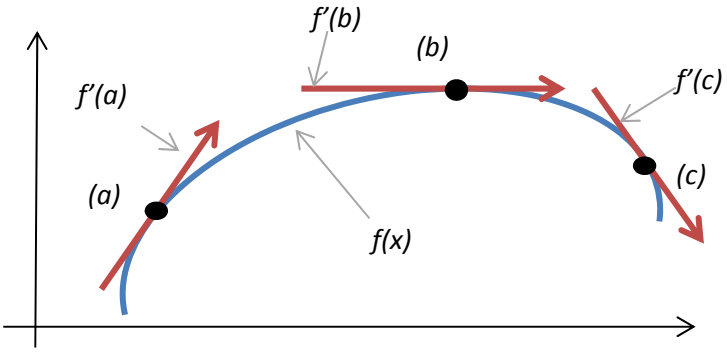
1) **Derivada "primera"**. Sabemos que la derivada no es sino el estudio de la **pendiente** en un punto determinado de la función original. Es decir, con ella analizamos cómo cambian INPUT-OUTPUT en un segmento infinitamente pequeño (un punto). Así, mediante la derivada primera, tendremos análisis similares a esto que, gráficamente, presentamos:



Es decir, f'(x) nos dice la pendiente de f(x) en un punto (a) determinado. Es decir, nos dice cómo cambia f(x) en un punto dado. f'(x) nos dice cómo cambia aquello que está en un "nivel superior": f(x).

Ahora, observemos qué tipo de información nos puede dar la derivada acerca del comportamiento de la función original f(x).

Veamos tres puntos significativos en la función y el tipo de información que nos aporta la derivada:



Observemos que f'(x) en (a) nos está hablando de un tipo de relación *INPUT->**f(x)**->OUTPUT* (*mediante la función f(x)*) de crecimiento. Es decir, cuando x crece f(x) crece. La derivada, la pendiente, nos habla de una relación positiva y, en ese sentido, si "completamos' f'(x) aportando el valor de a, tendríamos que:

$$\boldsymbol{f'(a) > 0\ ENTONCES\ QUIERE\ DECIR\ QUE\ f(x)\ ESTÁ\ CRECIENDO}$$

En cambio en (c) vemos que:

$$\boldsymbol{f'(c) < 0\ ENTONCES\ QUIERE\ DECIR\ QUE\ f(x)\ ESTÁ\ DECRECIENDO}$$

Sin embargo en (b) vemos algo un poco diferente, vemos que la pendiente es paralela al eje de las x, por lo que:

$$\boldsymbol{f'(b) = 0\ ENTONCES\ QUIERE\ DECIR\ QUE\ f(x)\ ESTÁ\ "ESTANCADA"}$$

Naturalmente, a nada que pensemos, veremos que este "estancamiento", "equilibrio", si es continuado es una "meseta" y si es un solo punto será un "**pico**" o un "**valle**". Es un **PUNTO CRÍTICO**. Dicho punto puede ser un máximo/mínimo relativo a una zona segmento determinado o absoluto si supone el Everest o la fosa de Las Marianas de la función (nota, si alguno de ellos está en el infinito, entonces se dirá que no está definido).

¿Cómo saber si es *pico* o *valle*? Muy simple, dando valores a la función a cada lado del punto crítico. Es decir, si tenemos esto (sólo hemos de dibujarlo mentalmente):

CRECE	PUNTO CRÍTICO	DECRECE	***PICO***
DECRECE	PUNTO CRÍTICO	CRECE	***VALLE***

Obviamente, casos de este otro tipo no pueden darse:

CRECE	PUNTO CRÍTICO	CRECE
DECRECE	PUNTO CRÍTICO	DECRECE

Pues en tal caso los punto críticos no serían tales puntos críticos, ya que la pendiente en ese punto no sería = 0, sino que estaría "en medio de una cuesta". Para que sea pico o valle, evidentemente, debe haber cambio de crecimiento.

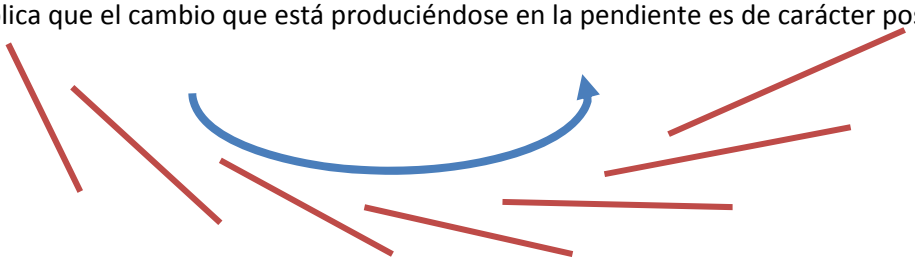
2) **Derivada "segunda"**. Ya sabemos que la *derivada primera* estudia el modo en que cambia una función original en un punto dado. La derivada segunda estudia, pues, cómo cambia la

derivada primera. Estudia el cambio de la función en su nivel anterior, a saber: la derivada primera. Es fácil entender que estudia el modo en que "evoluciona" la pendiente, no la función, sino la pendiente (su "nivel" justamente superior).

Veamos qué tipo de cambios puede sufrir una pendiente:

- **Caso cóncavo:** $\boldsymbol{f''(x)}$ ó $\boldsymbol{\frac{d^2}{dx^2} > 0}$ $\boldsymbol{(positiva)}$

Implica que el cambio que está produciéndose en la pendiente es de carácter positivo.



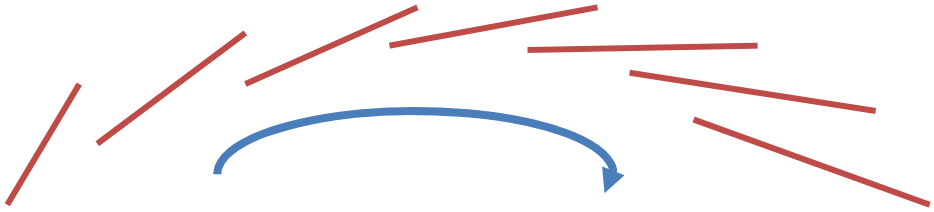
El comportamiento, el cambio de la tangente (*f'(x)*)obliga a la función original (*f(x)*) a seguir un patrón "cóncavo" .

¿Por qué positivo cóncavo? Muy simple, observemos el comportamiento de la tangente:

Naturalmente es un giro positivo, hace a f'(x) mayor, a 'y' mayor. Es decir, f''(x) provoca un comportamiento "cóncavo" de

- **Caso convexo:** $\boldsymbol{f''(x)}$ ó $\boldsymbol{\frac{d^2}{dx^2} < 0}$ $\boldsymbol{(negativa)}$

Totalmente análogo a lo que hemos dicho antes.



- **Caso inflexión:** $\boldsymbol{f''(x)}$ ó $\boldsymbol{\frac{d^2}{dx^2} = 0}$

En este caso estamos ante otro "**PUNTO CRÍTICO**". Pero en este caso no decide entre crecimiento/decrecimiento, sino entre concavidad/convexidad. Es, pues, un **PUNTO DE INFLEXIÓN**.

Como resumen pensemos en una función que describe una serie de posiciones sucesivas.

- La función original ***describe la posición: f(x)***
- La derivada de ésta describe cómo cambia la posición, es decir, **la velocidad: *f'(x)***.
- *Y la derivada segunda (f''(x)) describe cómo cambia la velocidad, es decir,* ***la aceleración: f''(x)***.

Sigamos, entonces, con el desarrollo del ejemplo que prometimos

$$2x^3 - 3x^2 - 12x$$

1) De entrada vemos que está definida para todos los números reales (si fuera un cociente tendríamos que evitar que el denominador se hiciera = cero, pero en este caso, un polinomio sin más, el dominio es (-infinito,+infinito).

2) Veamos qué puntos máximos/mínimos locales puede tener (de entrada, a simple vista podríamos apostar a que la función crece y decrece en sus extremos hacia el +/- infinito). Estudiemos si tiene picos y/o valles locales. Para ello derivaremos y buscaremos en qué momento esa derivada primera es = 0, es decir, esa tangente es paralela al eje de las x y/o, se produce un cambio de crecimiento/decrecimiento. Eso, por fuerza, como hemos visto, es o un pico o un valle.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$$

Luego:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

Extraigamos las raíces y tenemos que:

$$f'^{(x)} = 0, cuando\ x = -1\ y\ x = 2$$

Es decir, en esas 'X' la función va a hacer "algo", es un punto crítico. Veamos dónde está la función en esos puntos. Es decir calculemos la 'y' cuando x es -1 y/o 2. ***(ojo, esto se mira sobre f(x) y no sobre f'(x), obviamente, pues queremos dibujar la función, y no la tangente)***.

Así para x=-1, 'y' es:

$$f(x) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) = 7$$

Luego un punto crítico de crecimiento/decrecimiento es **(-1,7)**

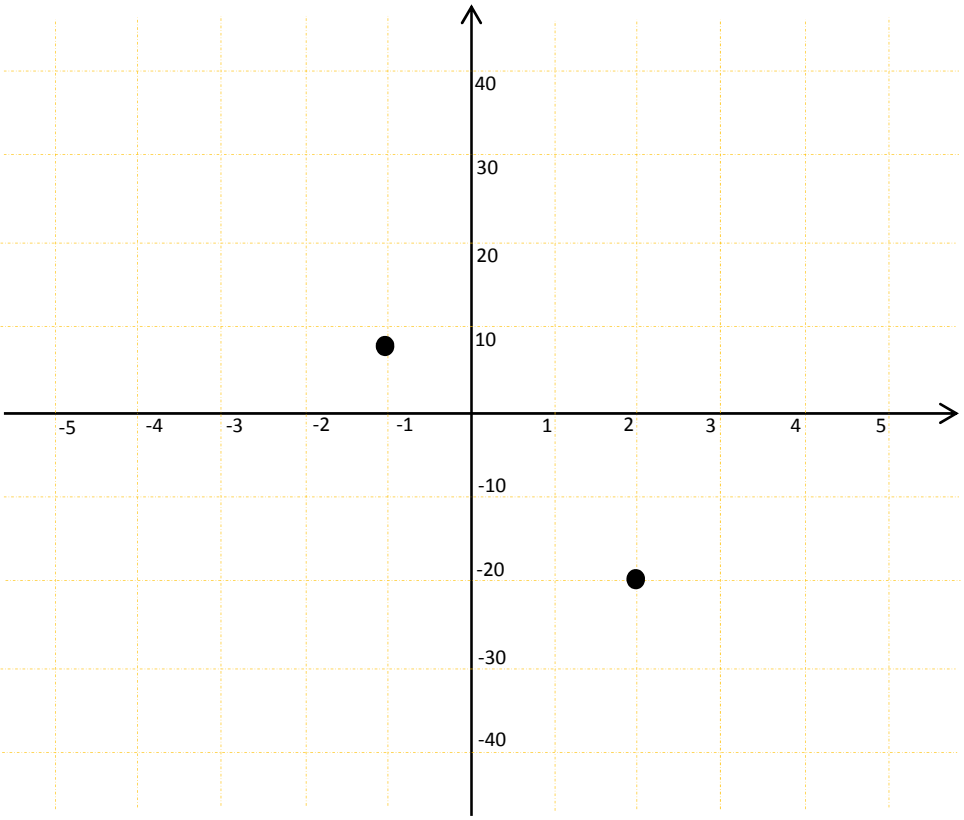
Y para x=2, 'y' es:

$$f(x) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) = -20$$

Luego otro punto crítico de crecimiento/decrecimiento es **(2,-20)**

Vamos a pintar un plano de coordenadas. Deformaremos un poco el eje de la y para que nos quepa bien, de manera que el eje de la e irá de 10 en 10 y el de la x de 1 en 1.

Marquemos los **PUNTOS CRÍTICOS** que tenemos hasta el momento para ir definiendo los sectores de crecimiento/decrecimiento.



Ahora tendríamos que ver el tipo de comportamiento que tiene la derivada (***f'(x)***)a cada lado de estos PUNTOS CRÍTICOS para saber si está creciendo o decreciendo. Hagamos una tabla para evitar estar calculando continuamente ***(IMPORTANTE, ESTAMOS ESTUDIANDO EL CRECIMIENTO Y EL DECRECIMIENTO, POR ESO USAMOS LA DERIVADA)***:

Hagamos una tabla de datos de la función derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

x	***f'(x)***
-2	24
-1	0
0	-12
1	-12
2	0
3	24
4	60

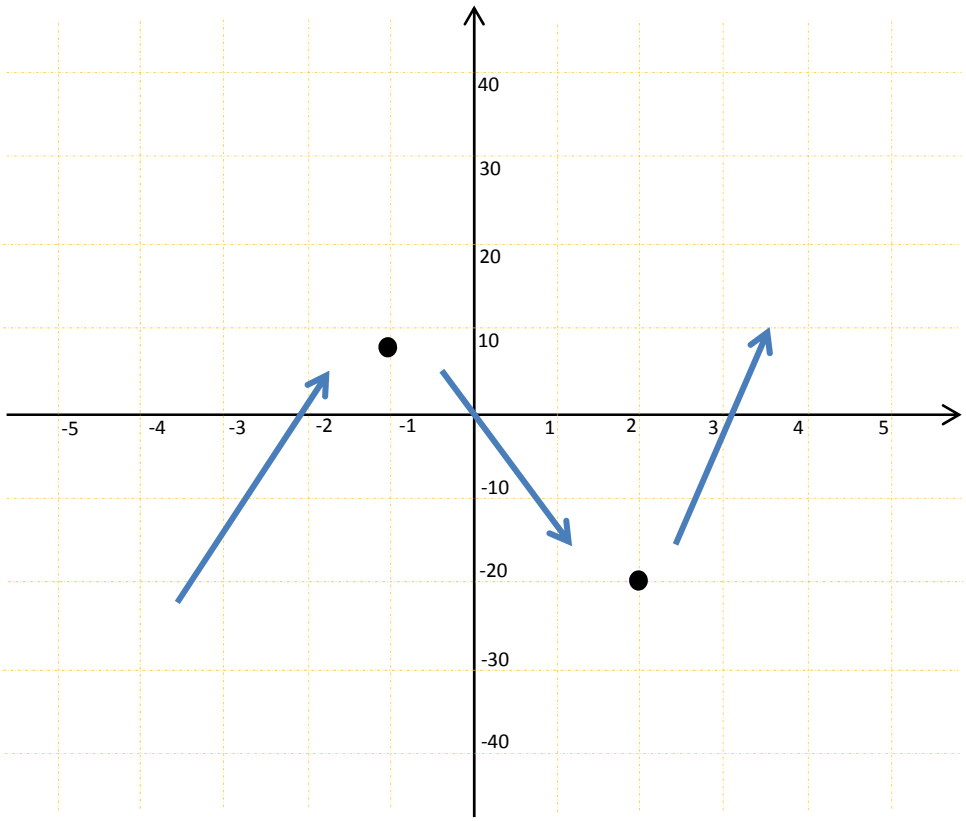
Veamos el punto (-1,7) (aquí sólo podremos tener la x de referencia, pues el 7 de la y pertenece a f(x) y no a f'(x)):

- *A la izda. de x=-1 f'(x) es positiva. Luego ahí la función f(x):* ***CRECE****.*
- *A la dcha. de x=-1 f'(x)es negativa. Luego ahí la función f(x):* ***DECRECE****.*
    - *Luego (-1,7) es un* ***PICO****.*

Veamos el punto (2,-20) (aquí sólo podremos tener la x de referencia, pues el 7 de la y pertenece a f(x) y no a f'(x)):

- *A la izda. de x=2 f'(x) es negativa. Luego ahí la función f(x):* ***DECRECE****.*
- *A la dcha. de x=2 f'(x)es positiva. Luego ahí la función f(x):* ***CRECE****.*
    - *Luego (2,20) es un* ***VALLE****.*

Es decir, nos hacemos una idea de que ***f(x)*** debe hacer algo parecido a esto:



Ok. Sin embargo no tenemos información cómo se alcanzan esos puntos, es decir, se llega de manera cóncava o convexa. Vemos, con cierta facilidad que debe ser convexa, pero vamos a hacerlo bien estudiando la derivada segunda.

Nota: ¿Por qué decimos que seguramente sea convexa? El modo cóncavo, si lo imaginamos, sería como una especie de colina que hace pico en (-1,7) y valle en (2,-20). Si fuera cóncava tendría que tener una forma un tanto extraña, como de pincho, como de una "J" que se acerca por la izquierda y al llegar al punto pico se invierte. En ese caso, la función en el punto cumbre no sería derivable pues para que algo sea derivable debe ser posible hacerle un "zoom infinito" y acabar encontrando una recta….Ojo…. ver esto, no estoy del todo seguro…

Veamos la derivada segunda:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

Luego:

$$f''(x) = 12x - 6$$

Busquemos un punto crítico en la derivada segunda, es decir, un punto crítico en lo que respecta a la convexidad/concavidad. El punto en que la convexidad se convierte en concavidad o viceversa.

Para ello:

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$12x - 6 = 0$$

$$12x = 6$$

$$x = 1/2$$

Identifiquemos el punto de la función (obviamente en *f(x)*):

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) = -6.5$$

Luego el punto de inflexión es (0.5,-6.5).

¿Pero qué lado es cóncavo y qué lado convexo?

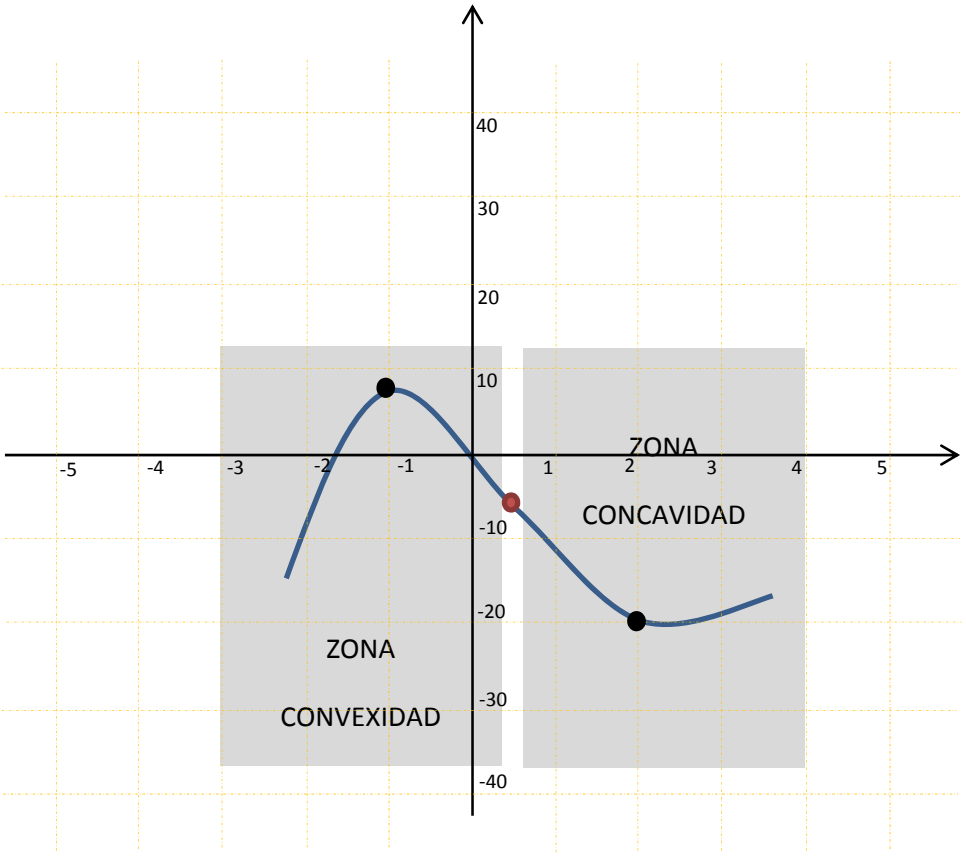
$$f''(x) = 12x - 6$$

x	*f''(x)*
0	-6
0.5	0
1	6

Es decir en **f''(0)**, a la izda. de x=0.5, la función es **<0**, luego en esa zona es ***CONVEXA***.

Y en **f''(1)**, a la derecha de x=0.5, la función es >0, luego es ***CÓNCAVA***.

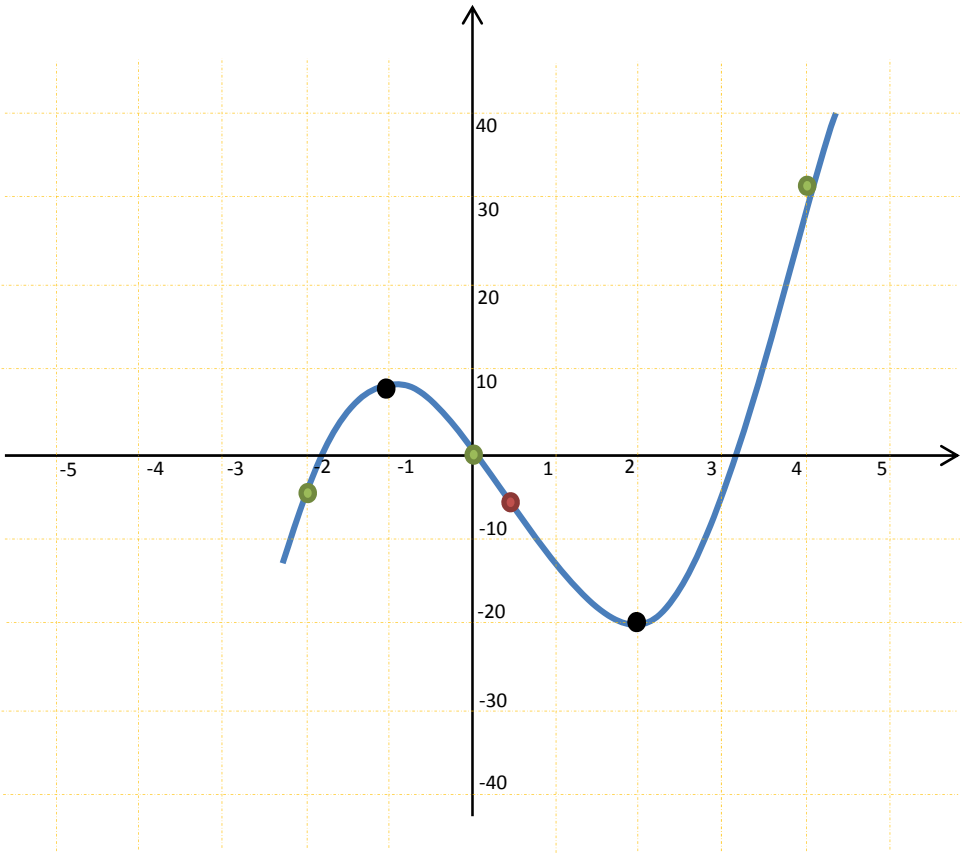
Esto quiere decir que añadiremos un **PUNTO CRÍTICO** más: el punto de inflexión.



Pero tendremos que definir un poco mejor la gráfica, así que, ya para terminar, podemos obtener algunos puntos de referencia más en un dominio "razonable" que nos permita vislumbrar las partes importantes de la gráfica,. Calcular otros puntos por los que pasa la gráfica (naturalmente, para identificar los puntos "concretos", siempre sustituimos en *f(x)*.

x	*f(x)*
-2	-4
0	0
4	32

Así, podremos decir definitivamente:



Y así es como se representa gráficamente una función.

Bonito, ¿ehn?

Explicaciones definitivas

Integrales 1. Introducción a la antiderivación.

Mediante el proceso que vamos a estudiar ahora realizaremos la acción inversa de la derivación. Es decir, la antiderivación. No tiene, sin embargo, hablar de "LA" antiderivada de una función pues el camino inverso de la derivada no nos lleva a un único camino, es decir, una función tiene varias antiderivadas. Por eso no podemos hablar de "LA" antiderivada, sino de "UNA" antiderivada.

Una función tiene una sola derivada:

$$f(x) = 2x^2 \rightarrow f'(x) = 4x$$

Sin embargo, no sucede al revés, pues la función 4x puede tener infinidad de antiderivadas:

$$\int 4x\,dx = 2x^2 + 5;\ 2x^2 + \pi;\ 2x^2 - 12345;\ \ldots$$

Es fácil ver que siempre podrá haber una constante que 'se pierde en el camino de la derivada' y que hemos de 'volver a generar' en el proceso inverso.

Como vemos la forma y patrón que se sigue es:

$$\int f(x)\,dx \rightarrow antiderivamos \rightarrow F(x) + C$$

Veamos reglas para 'antidiferenciar'.

Antiderivada de una suma.

Supongamos que F(x) es la antiderivada de f(x) y que G(x) es la antiderivada de g(x).

Definamos una nueva función de modo que:

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

Tendremos otra función, su antiderivada:

$$H(x) = F(x) + G(x)$$

Que debe cumplir, naturalmente que:

$$H'^{(x)} = f(x) + g(x) = h(x)$$

Así, si tenemos:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int g(x)\,dx = G(x) + C$$

Entonces:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = F(x) + G(x) + C$$

Es decir:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Antiderivada de una potencia.

Siempre que $n \neq -1$

Obviamente cuando n = -1, al integrar, nos llevará a una potencia n = 0 que nos generará un '1' sea lo que sea… por eso en ese caso hay que atender a una regla especial.

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Varios ejemplos:

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} \, dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int (15x^3 - 4x + 3) \, dx = 15\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2} + 3x + C$$

Observamos que el comportamiento respecto a las constantes que multiplican a la variable que se integra, como era de esperar, es el mismo que en la derivación:

$$\int ax^n \, dx = a \cdot \int x^n \, dx = a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Veamos ahora el caso especial que comentamos antes en el que *n = -1*.

$$\int \frac{1}{x} dx = \text{¿?}$$

Ok, sabemos que:

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$$

Por lo que podremos afirmar que:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

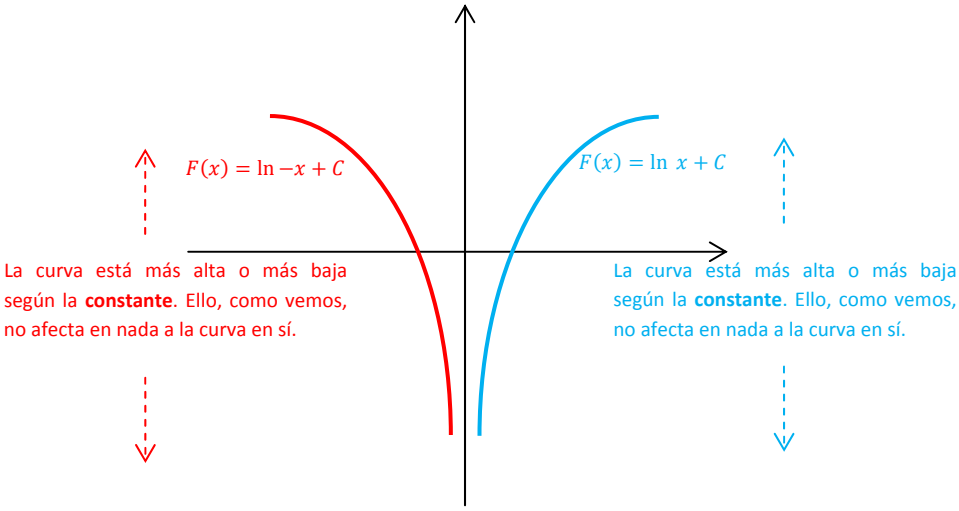
De hecho podemos definirla de una manera general más completa:

$$\int \frac{1}{x} dx =$$

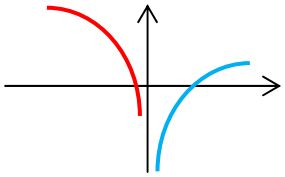
1. $\ln x + C$ ***si*** $x > 0$

2. $\ln -x + D$ ***si*** $x < 0$

Veamos esto en un gráfico:



Vemos que el valor de la constante puede ser diferente en diferentes zonas del dominio, es decir, podríamos tener algo así:



Y ello no afectaría, como es fácil ver, a la derivada, a la pendiente de la curva, en ningún caso. En este caso estamos definiendo una función por tramos (no está definida en x = 0) y la constante puede ser diferente en cada tramo sin que ello afecte a la función misma. Por ello, por el 'influjo por partes' de la constante, tendremos que hablar de **'función de x localmente constante'**. Es decir, depende de la definición de x para cada sección del dominio. Lo tendríamos que escribir así:

$$si\ F(x) es\ una\ antiderivada\ de\ f(x), entonces$$

$$alguna\ otra\ antideriva\ de\ f(x)\ tiene\ la\ forma: F(x) + C(x)$$

Antiderivada de funciones trigonométricas.

Las primeras son fácilmente de deducibles por lo que ya conocemos de las derivadas.

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \rightarrow \boxed{\int \boldsymbol{\cos x\, dx = \sin x + C}}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \rightarrow \boxed{\int \boldsymbol{\sin x\, dx = -\cos x + C}}$$

¿Y a tangente? No vamos a hacer una demostración, sólo una verificación.

Ok, procedamos al revés. Sabemos ya cuál es, ésta: $\int \tan x = \ln \sec x + C$

Para verificar esto sólo nos bastaría con derivarlo y esperar que nos dé: tan x.

$$\frac{d}{dx}\ln(\sec x) + C = \frac{d}{dx}\ln(\sec x) + \frac{d}{dx}C = \frac{d}{dx}\ln(\sec x) + 0 = \frac{d}{dx}\ln(\sec x)$$

$$\frac{d}{dx}\ln(\sec x) = \frac{1}{\sec x}\cdot\frac{d}{dx}\sec x$$

$$= \frac{1}{\sec x}\cdot \sec x \tan x \rightarrow \tan x$$

$$\boxed{\int \tan x = \ln \sec x + C}$$

Veamos ahora la secante.

$$\boxed{\int \sec x = \ln|\sec x + \tan x| + C}$$

Verifiquemos:

$$\frac{d}{dx}\ln|\sec x + \tan x| = \frac{1}{\sec x + \tan x^{*}}\cdot\left(\frac{d}{dx}\sec x + \frac{d}{dx}\tan x\right)$$

Nota: se quitan las barras de valor absoluto por la cara*

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x}\cdot(\sec x \cdot \tan x) + (sec^2 x)$$

$$= \frac{\sec x \cdot (\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \sec x$$

Veamos algún ejemplo más complejo.

$$\int \sin^2 x = ¿?$$

Sabemos que la derivación de esa función es muy fácil:

$$\frac{d}{dx}\sin^2 x = 2\sin x \cos x$$

Pero…¿es su antiderivada tan fácil?.... nope…

A ver, supongamos una candidata a antiderivada:

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\sin^3 x}{3} = 3\frac{\sin^2 x}{3}\cdot \cos x$$

Aaaarrggg…. La primera parte pinta genial… pero el 'cos x' se lo carga todo…

Vamos a tirar de deus ex machina e introducir una identidad trigonométrica que nos va a permitir solventar este problema (conocer bien las identidades trigonométricas para estos casos es, me temo, un esfuerzo que tenemos que hacer sí o sí).

Sabemos (o tendremos que saber) que por la **'identidad del angulo medio'**:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Esto, como se ve a simple vista, es mucho más abordable pues podremos sustituir:

$$\int (\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2})\, dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2}\cos(2x)\, dx$$

Busquemos dos funciones que, al derivarlas, nos den cada una de estas funciones:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}x - \frac{d}{dx}\frac{1}{4}\sin 2x$$

Esto, efectivamente, nos daría: $\sin^2 x$

Por lo tanto, sirve como su antiderivada, es decir:

$$\int \sin^2 x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Es un poco putada, no por lo que supone el razonamiento en sí, sino porque si no se conoce la identidad trigonométrica oportuna nos podemos pegar mil años probando… He ahí el arte de la antiderivación: encontrar el camino oportuno hacia arriba.

Antiderivada de e^x y $ln\ x$.

Cuando hablamos de e^x, ya debemos saberlo, hablamos de algo realmente simple, pues el proceso de derivación/integración no le afecta:

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Recordemos el chiste de la fiesta de los números en que e^x estaba to triste en un rincón de la sala. Se acerca π borracho como una cuba mientras a duras penas es capaz de sostenerlo *i*. π le dice a e^x: "Venga hombre, intégrate". Y e^x le responde triste: "Para qué, si va a ser lo mismo…". Malo, ok, pero a mí me hace gracia imaginar la cara de e^x mirando al suelo con cara de: "qué asco, siempre igual, siempre igual…". Sigamos.

Vamos a ver ahora la antiderivada de ln (x).

$$\int \ln(x)\,dx = ¿?$$

La clave, realmente, está en rebuscar en nuestra memoria si alguna vez hemos derivado algo que nos haya dado ln x o construir algo sabiendo a la conclusión a la que queremos llegar. Si lo tenemos, violà. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}x \cdot ln\,(x) = \frac{d}{dx}x \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{d}{dx}\ln(x)$$

$$\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

Estamos cerca, probemos ahora con:

$$\frac{d}{dx}x \cdot ln\,(x) - x = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

Luego (ahora recorramos el camino inverso, 'de abajo hacia arriba'):

$$\int \ln(x)\,dx = x \cdot ln\,(x) - x + C$$

Como vemos, es todo un poco putada, hay que depender de ciertas ideas felices… No hay, como en las derivadas, una regla aplicable sin más, sino que dependemos de que se nos ocurra algún camino (entre los muchos que puede hacer) que nos lleve al destino… Puede parecer deprimente pero… a) hay trucos que vamos a ir viendo y b) es estimulante. En definitiva, no va a ser tan difícil y dependiente de la inspiración como parece.

En general, la estrategia fundamental es la siguiente:

$$\frac{d}{dx}(\ldots\ldots) = f(x)$$

$$\updownarrow$$

$$\int f(x) = (\ldots\ldots)$$

Veamos un ejemplo de ESTRATEGIA para la antiderivación. Supongamos que queremos antiderivar la función:

$$\int \cos(3x) = ¿?$$

La estrategia pasa por buscar algo cuya derivada sea, justamente, $\cos(3x)$. Sabemos que el 'seno' debe tener algo que ver pues ya vimos en la derivación de las funciones trigonométricas que seno y coseno se van 'alternando'. Veamos qué pasa si derivamos, directamente seno (3x):

$$\frac{d}{dx}\sin(3x) = \cos(3x) \cdot 3 = 3\cos(3x)$$

Aaarrggg! La regla de la cadena, cuando multiplicamos por la derivada de 'lo de dentro', nos introduce un incómodo '3'.

Ok, luchemos contra ese '3' desde el origen. Supongamos, entonces, que lo que vamos a derivar es:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{3}\sin(3x) = \frac{1}{3}\cos(3x) \cdot 3 = \cos(3x)$$

Luego, podemos concluir que:

$$\int \cos(3x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$$

Ahora sí. Ésta es la estrategia que hemos seguido ha sido:

- Suponer una función candidata a ser una antiderivada.
- Derivarla y ver qué se ajusta y qué se desvía.
- Introducir en la función antiderivada candidata las correcciones que eviten esas desviaciones.
- Verificar que todo marcha en orden al derivar la nueva candidata antiderivada 'tuneada'.

Veamos otro ejemplo de estrategia para la antiderivación. Supongamos que queremos antiderivar la función:

$$\int \sin(2x+1)\,dx = ¿?$$

De entrada es obvio que el coseno aquí pinta algo, probemos esta candidata:

$$\frac{d}{dx}\cos(bla, bla, \dots) = -\sin(bla, bla, \dots) \cdot \frac{d}{dx}(bla, bla, \dots)$$

Es decir, tenemos que empezar tuneando a la candidata con un signo negativo. Eso ya lo tenemos seguro. Sigamos:

$$\frac{d}{dx} -\cos(2x+1) = 2\sin(2x+1)$$

Tenemos que quitar ése '2'.

$$\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\cos(2x+1)=\sin(2x+1)$$

Luego:

$$\int \sin(2x+1)\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C$$

Vemos que ahí se reproduce un patrón, algo de lo que podríamos extraer una regla general. Observamos que cuando tenemos que encontrar la antiderivada de una función del tipo:

$$\boxed{\int \mathrm{f}(mx+b)\,dx=\frac{F(mx+b)}{m}+C}$$

Veamos una estrategia para derivar algo del tipo e^{-x^2}:

$$\int e^{-x^2}=¿\,?$$

Naturalmente sabemos que la base de la antiderivada será 'e'. El problema lo tenemos con el exponente...

Voy a proponer a esta candidata:

$$\frac{d}{dx}e^{-x^3}=e^{-x^3}\cdot(-3x^2)$$

Empecemos a tunear:

$$\frac{d}{dx}\frac{e^{-x^3}}{-3x^2}=e^{-x^3}$$

Esto es un error total, ¿por qué? Porque estoy introduciendo como constantes valores que son dependientes de x, es decir, como si no fueran a cambiar cuando se vaya a derivar. Error total. Esto tiene jodida solución….

Voy a proponer a esta otra candidata:

$$¿\int e^{-x^2}=\frac{e^{-x^2}}{-2x}\,?$$

Verifiquemos. Presentemos, siempre es más fácil, la fracción como un producto:

$$\frac{d}{dx}\frac{e^{-x^2}}{-2x}=\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\cdot(-2x)^{-1}\right)$$

$$=e^{-x^2}\cdot(-2x)\cdot(-2x)^{-1}+e^{-x^2}\cdot(-1)(-2x)^{-2}\cdot(-2)$$

Nota: $\frac{d}{dx}(-2x)^{-1}=(-1)(-2x)^{-2}\cdot(-2)$ $(se\ aplica\ la\ regla\ de\ la\ cadena\ \ldots)$

$$=e^{-x^2}+e^{-x^2}\cdot(-2x)^{-2}\cdot(2)$$

En definitiva… esta candidata no nos vale…

De hecho, la solución para este problema está más allá de las funciones elementales que hemos estado usando (polinomios, trig, log, e,…). De hecho…**NO TIENE SOLUCIÓN** (toma palo). Ya en nuestra primera candidata observamos que algo de esto podía pasar. Ningún exponente con exponente > 1 podrá dejar, cuando derivemos, una constante que podamos introducir como elemento 'corrector' de la antiderivada.

Por eso, esta otra operación, sí se puede hacer sin problemas:

$$\int e^{-6x+6} = ¿\,?$$

Propongo:

$$\frac{d}{dx} e^{-6x+6} = e^{-6x+6} \cdot (-6)$$

Ajá, ese (-6) sí que vamos a poder quitárnoslo sin dificultad. La nueva candidata va a ser:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{-6} e^{-6x+6} = e^{-6x+6}$$

Luego:

$$\int e^{-6x+6} = \frac{e^{-6x+6}}{-6} + C$$

La relación entre posición, velocidad y aceleración.

Sabemos que:

$$\frac{d}{dx}p(t) = v \rightarrow \frac{d}{dx}v(t) = a$$

A la inversa, de manera obvia, sabemos que:

$$\int a\,(t)\,dt = v \rightarrow \int v\,(t)\,dt = p$$

En este sentido, conociendo, por ejemplo, la aceleración, podremos conocer la posición de un cuerpo mediante la segunda antiderivada de la aceleración. ¿Exactamente? Naturalmente, hemos visto, al antiderivar incluimos una constante. Una constante cuyo valor, a priori, desconocemos. Dicha constante no es otra cosa que los valores iniciales, los puntos de partida. Es decir, supongamos la gráfica de la aceleración. La evolución de dicha aceleración, velocidad y/o posición, permanecerá constante, es decir, no la alteraremos, lo único que haremos es 'ponerla más arriba o más abajo' respecto del eje de coordenadas. Es decir, según su posición inicial, estará más arriba o más abajo. En definitiva, según la constante, estará más arriba o más abajo, pero el comportamiento de la curva será el esperado a partir de ese momento.

Por ejemplo, supongamos que un cuerpo tiene una aceleración:

$$a = 8\,\frac{m}{s^2}$$

Calculemos, mediante la antiderivación, una **'posible'** velocidad:

$$\int a(t)\,dt = \int 8\,dt = 8t + C$$

Donde 'C' es la $v_{(0)}$, la velocidad inicial. Por eso decíamos que era una 'posible' velocidad, pues finalmente dependerá de la velocidad inicial desde la que se empiece a contar (esta velocidad inicial hará que la gráfica de la velocidad esté 'más arriba o más abajo' en el plano de coordenadas).

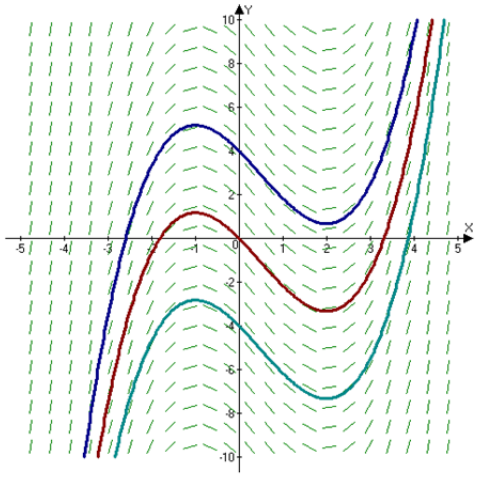
Ahora busquemos la posición:

$$\int v(t)\,dt = \int 8t + C\,dt = 8\frac{t^2}{2} + Ct + D = 4t^2 + Ct + D$$

Donde Ct es la velocidad inicial por el tiempo (nos dará una posición adicional) y D es la nueva constante que corresponde, en este caso, con la posición inicial (como es evidente). En definitiva, la fórmula de la posición a la que llegamos nos aporta el acumulado de: $4t^2$ que nos da la posición que 'genera el efecto de la aceleración durante el tiempo al cuadrado', *Ct* que nos da la posición generada por la velocidad inicial por el tiempo transcurrido y D que nos da la posición inicial. La posición definitiva es el sumatorio de estas 'tres posiciones'.

Concepto de 'campo pendiente' (slope field)

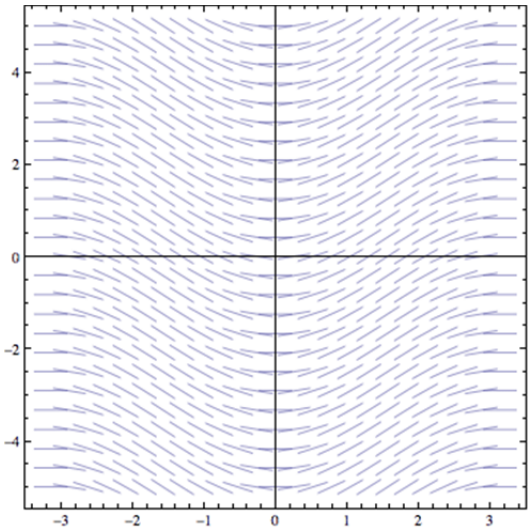
El campo pendiente lo podemos visualizar como una especie de campo magnético en el que representamos la pendiente en cada punto del plano. Lo podemos representar como una capa quequeda por debajo de la capa de la propia gráfica de la función representada. En la capa de arriba representamos la función. En la capa de abajo representamos la pendiente de cada punto del plano y, en contraste con la gráfica de la función, podremos analizar el comportamiento de la gráfica sobre el campo de pendiente de fondo. He aquí un ejemplo:



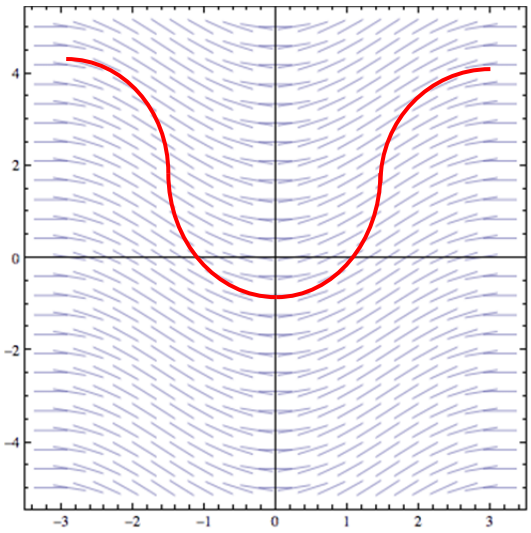
Obviamente es fácil ver cómo son las pendientes en los puntos críticos de las gráficas. Pendiente 0 (paralela al eje x en los máximos y mínimos), pendientes altísimas/bajísimas en los puntos de crecimiento/ decrecimiento grande, etc…

El campo pendiente es una herramienta muy útil para la antiderivación. ¿Por qué? Muy simple. Sabemos que la pendiente es la derivada de una función. Si tengo un campo con las pendientes definidas, podré trazar la gráfica que sigue esas pendientes y, justamente, esa gráfica es la gráfica de la función antiderivada. Un ejemplo:

Supongamos este campo pendiente, donde se recoge el comportamiento de la pendiente, de la derivada de una función:



Si construimos la función cuya pendiente sigue ese patrón, obtendríamos algo parecido a esto:



Que tiene toda la pinta de ser la función sin (x) (de hecho lo es). Lo único que hab´ria que definir es 'la altura' a la que está, es decir, la CONSTANTE de la función antiderivada. En definitiva, el campo pendiente nos da muchas pistas acerca de la función antiderivada a la que hace referencia.

Supongamos que queremos hallar:

$$\int x \cos x = ¿?$$

Una buena candidata sería:

$$x \sin x$$

Veamos:

$$\frac{d}{dx} x \sin x = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$$

Ojo, pero sé que:

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

Así que sin propongo:

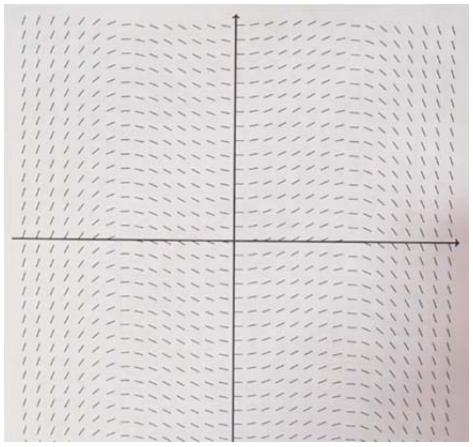
$$\frac{d}{dx} x \sin x + \cos x = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x - \sin x = x \sin x$$

Por lo que podremos afirmar que:

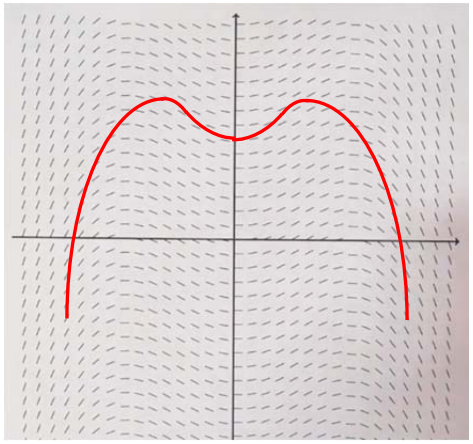
$$\int x \cos x = x \sin x + \cos x$$

Si miramos esto analizando el campo pendiente, veremos que, efectivamente, esto es así.

Campo pendiente de la antiderivada de *x cos (x)*. Es decir, el valor de esta función *(x cos (x))* en todos los puntos del plano. OJO, no es la derivada de *x cos (x)*, sino la expresión del valor de esa función *(x cos (x))* en todos los puntos del plano. Esos valores de esta función son el campo pendiente de otra función 'superior'. Son el campo pendiente de su antiderivada pues *x cos (x)* es la derivada de la función antiderivada que estamos buscando. Aquí tenemos todas las pendientes de la función que estamos buscando:



La representación gráfica de esa función antiderivada (que tiene ese campo pendiente) es, entonces, aproximadamente así:



Que es, precisamente la representación gráfica de $x \sin x + \cos x$. Lo único que no sabemos es 'a la altura' a la que está respecto del eje de coordenadas.

Resumen total: la clave de la antiderivada es pensar siempre en un candidato del que descender e ir corrigiendo. El problema es que al "bajar" e ir corrigiendo se nos puede olvidar que estábamos tratando de "subir". En esto radica gran parte del éxito del proceso de antiderivación.

Ejercicios en notación Wolfram-Alpha:

1.∫(−7x^3−2x^2−8x−7)dx

(-7/4*x^4)+(-2/3*x^3)+(-8/2*x^2)-7*x+C

2.∫(−6x^84+5x^35−7)dx

(-6/85*x^85)+(5/36*x^36)-7*x+C

3.∫(−8x+4)3dx

((-8*x+4)^4)/(-8*4)+C

4∫cos(x)dx

sin(x)+C

5∫e^(4x−8)dx

(1/4)*(E^(4*x-8))+C

6∫e^xdx

E^x+C

7∫(10x^3−9x^2+10x−7)dx

(10/4*x^4)+(-9/3*x^3)+(10/2*x^2)+(-7*x)+C

8∫sec^2(x)dx

tan(x)+C

9∫e^(9x−10)dx

(1/9)*E^(9*x-10)+C

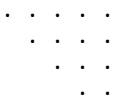
Explicaciones definitivas

Integrales 2. La integración.

Repasemos someramente cómo resolver sumatorios. Sabemos que:

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n$$

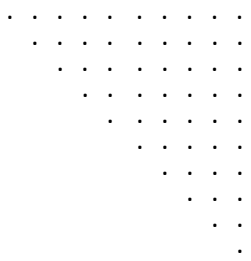
Estos son números triangulares, ¿por qué? Porque geométricamente forman un triángulo:



Por ejemplo, analicemos:

$$\sum_{n=1}^{10} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$de\ donde\ n = 55$



Pero hay otro modo para hallar ese *n=55* sin tener que sumar los números uno a uno. Por ejemplo (veremos que tenemos *11·5=55*):

$$1 + 10 = 11$$

$$2 + 9 = 11$$

$$3 + 8 = 11$$

$$4 + 7 = 11$$

$$5 + 6 = 11$$

Es decir, podríamos redefinir el sumatorio como la suma del primero con el último, más la suma del segundo con el penúltimo, más la suma del tercero con el antepenúltimo, …, es decir:

$$\sum_{n=1}^{k} n = (1 + k) + \big(2 + (k - 1)\big) + \big(3 + (k - 2)\big) + \cdots$$

$$= (1 + k) + (1 + k) + (1 + k) + \cdots + (1 + k)$$

¿Cuántas veces tenemos (1+k)? Obviamente k/2, es decir:

$$\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{n} = (1 + k) \cdot \frac{k}{2} = \frac{(\mathbf{1} + \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}$$

Otro caso. ¿Cómo calculamos el sumatorio de todos los números impares? Podemos formularlo así:

$$\sum_{n=1}^{k}(2n-1) = 1+3+5+\cdots+(2k-1)$$

Es la suma de los primeros K números impares. Hagamos un poco de álgebra:

$$\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{2n-1}) = \sum_{n=1}^{k}2n - \sum_{n=1}^{k}1 = 2\cdot\sum_{n=1}^{k}n - \sum_{n=1}^{k}1^{*}$$

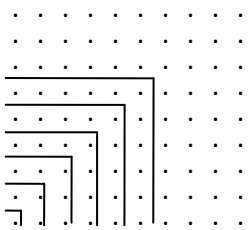
$Nota^{*}: \sum_{n=1}^{k}1 = 1+1+1+1\ldots k\ veces.$

Que podemos sustituir por lo que ya conocemos de antes de manera que:

$$= 2\cdot\frac{(1+k)\cdot k}{2} - k$$

$$= k^2 + k - k = \boldsymbol{k^2}$$

La suma de los k primeros números impartes tiene forma de cuadrado perfecto. Se puede ver fácilmente de manera geométrica:



En la misma línea, para seguir familiarizándonos con los sumatorios, recogeremos la siguiente formulación que se podría visualizar geométricamente (demasiado largo, aunque nada difícil, como para que sea operativo recogerlo aquí). La ponemos aquí porque es francamente interesante y reutilizable en un futuro:

$$\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{n^2} = 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2$$

$$= \frac{\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{k+1})\cdot(\boldsymbol{2k+1})}{\boldsymbol{6}} = \frac{(k^2+k)\cdot(2k+1)}{6} = \frac{(2k^3+k^2+2k^2+k)}{6}$$

$$= \frac{\boldsymbol{2k^3+3k^2+k}}{\boldsymbol{6}}$$

Igualmente recojamos ahora el Teorema de Nicómaco sobre la suma de los primeros k cubos perfectos:

$$\sum_{n=1}^{k} \boldsymbol{n^3} = \left(\sum_{n=1}^{k} \boldsymbol{n}\right)^{\mathbf{2}}$$

Es decir, podemos, sustituyendo, transformarlo en:

$$= \left(\frac{(1+k)\cdot k}{2}\right)^2 = \frac{\boldsymbol{(1+k)^2 \cdot k^2}}{\boldsymbol{4}}$$

La explicación geométrica es, de nuevo, muy simple de entender, pero larga y tediosa de hacer aquí en un Word mediante las autoformas… En google es muy fácil de ver. Nos la saltamos.

Estas fórmulas simplifican mucho el trabajo con el cálculo que vamos a ver en las siguientes líneas.

Veamos algunos casos de resolución de este tipo de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{21}(1+10i-i^2) = 21\cdot 1 + 10\cdot\frac{22\cdot 21}{2} - \frac{21\cdot 22\cdot 43}{6} = -980$$

$$\sum_{i=1}^{37}(-5+8i-6i^2) = 37\cdot(-5) + 8\cdot\frac{38\cdot 37}{2} - 6\cdot\frac{37\cdot 38\cdot 75}{6} =$$

$$\sum_{i=-1}^{4} 7^* = 7+7+7+7+7+7 = 7\cdot 6 = 42$$

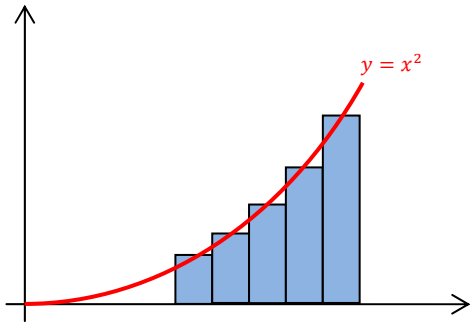
$Nota^*$: $Ojo, no\ estamos\ hablando\ de\ \sum 7i$, sino de $\sum 7$ y es por 6 porque i pasa por -1,0,1,2,3,4. Es decir, para i= números negativos tendremos que calcular la distancia entre k e i y sumarle 1 por el 0. K definitivo sería, pues: $K = k + |i| + 1$

$$\sum_{i=2}^{5}(6i-5) = (6\cdot 2-5)+(6\cdot 3-5)+(6\cdot 4-5)+(6\cdot 5-5) = 64$$

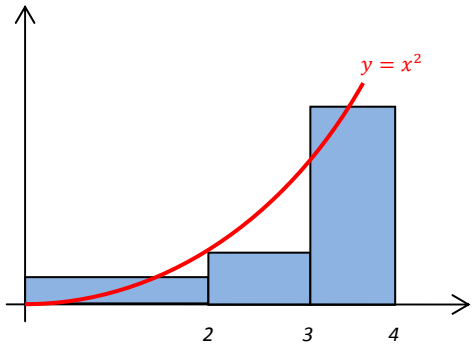
En este caso observamos que i no empieza en 1, sino en dos. Naturalmente, si quisiéramos hacer una fórmula para esto tendría que ser, el sumatorio normal, como si partiera desde 1 y después le resto el sumatorio de lo que realmente no hay desde 1. Al menos es lo que se me ocurre (seguro que esto es así).

Cálculo de áreas de regiones curvas

El único modo que tenemos de calcular áreas de regiones curvas es mediante la aproximación mediante la inserción de rectángulos. Por ejemplo:



Supongamos, de hecho el siguiente escenario, donde la altura de cada rectángulo es la función evaluada en determinados puntos:



Teniendo en cuenta que las proporciones del gráfico que he dibujado no son exactas, la aproximación al área bajo la curva sería:

1- El área del primer rectángulo: 2 (recorrido en x) · 'y' evaluada en el punto elegido:1 (en este caso es 1 aunque, como hemos dicho, las proporciones no estén bien en el dibujo). Es decir, el primer rectángulo tiene un área de: xy = 2 · 1 = 2 unidades.
2- El área del segundo rectángulo: [1 (recorrido en x) · 'y' en 2] = $1 \cdot 2^2$ = 4 unidades.
3- El área del tercer rectángulo: [1 · y en 3.5] = $1 \cdot 3.5^2 = 12.25$ unidades.

De donde:

$$A_{bajo\ la\ curva} \approx 2 + 4 + 12.25 = 18.25\ u$$

Naturalmente, para hacer aproximaciones más precisas habré de usar rectángulos de base más pequeña. Mientras más "finos" sean los rectángulos, más preciso será el acercamiento al área bajo la curva.

Esto es **LA SUMA DE RIEMANN: Definición de INTEGRAL.**

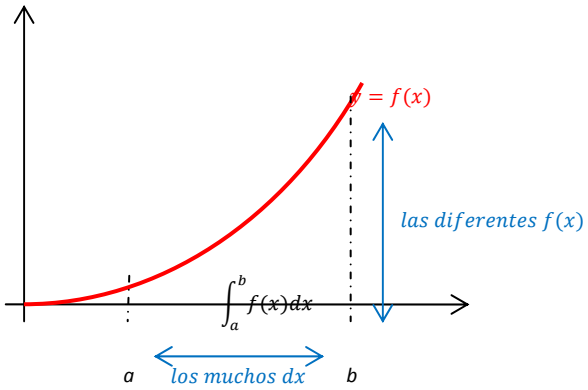
Como hemos visto, seleccionaremos un número de intervalos (mientras mayor, más precisión) y elegiremos un punto donde evaluar la altura del cada rectángulo. SI lo elegimos que coincida con la esquina superior izquierda de todo los rectángulos (lo vemos claramente si lo imaginamos), tendremos una aproximación por debajo del valor real. Esto es la Left Riemann Sum. Si el punto de evaluación de la altura lo hacemos coincidir con la esquina superior

derecha, tendremos una aproximación por encima del valor real. Esto es la Right Riemann Sum. Si tomamos como referencia para la altura, el punto medio del segmento de la parte de arriba de cada rectángulo, tendremos una aproximación más exacta, naturalmente, aunque no exacta, pues evaluamos una curva, es decir, la curva no es la diagonal exacta del rectángulo en cuestión. En definitiva, en términos generales, podemos expresar la suma de Riemann como:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Es decir, la altura seleccionada para el rectángulo (x_i^*), multiplicada por la base del rectángulo (x, por ejemplo, 5, menos x(i-1) es decir, 4 que es, obviamente, la anchura de la base) … y que será la distancia arbitrariamente pequeña que adoptemos para su base.

Ya estamos a un paso de la definición de integra. ¿Qué es una integral? ¿Cuál es su definición? Naturalmente estamos ante un problema de aproximación a límites, rectángulos cuya base tiende a 0:



Donde *f(x)* es la altura en el punto en cuestión, y *dx* es la anchura, el diferencial, de rectángulo y $\int_a^b$ es la suma de todos los productos *f(x)·dx* en el intervalo [a,b], es decir, la suma de todos los rectángulas infinitamente finos que hay bajo la curva en el intervalo [a,b]. Así, tenemos que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{ancho\ máximo\ base \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Extraigamos un TEOREMA:

Siendo *f(x)* continua, es necesariamente derivable (recordemos que si estamos hablando de la existencia de la integral de una función, es que existe su derivada previamente, es decir, que toda función continua es integrable (pues estamos reconociendo la continuidad de su derivada)). Entonces podremos decir:

$$\int_a^b f(x)dx = I$$

Veamos un ejemplo de resolución de una Left Riemann Sum dividiendo el intervalo en 2 rectángulos (integración según la definición):

$$\int_3^{10} (-10x^2 + 3x + 6)\, dx$$

Como hemos dicho que cogemos 'los lados izquierdos' de los rectángulos para evaluar 'y' y dx será, lógicamente, la mitad del intervalo propuesto (nos han dicho 2 rectángulos):

$$= \big((-10(3^2) + 3 \cdot 3 + 6) \cdot 3.5\big) + \big((-10(6.5^2) + 3 \cdot 6.5 + 6) \cdot 3.5\big) = -1652$$

Ahora, si realizáramos la integral definida (ya veremos que es), obtendríamos un resultado parecido, aunque mucho más preciso:

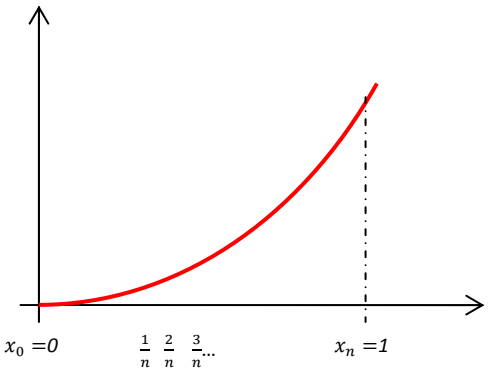
$$\int_3^{10} (-10x^2 + 3x + 6)\, dx = -10\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 6x + C$$

Ahora sustituiríamos por x por 10 y le restamos la sustitución de x por 3, y obtendríamos el valor de la integral para el intervalo [3,10] (duda…qué pasa con la constante??, la usaremos para subir o bajar la curva y, así, hacer crecer con un bloque constante (o restar) el área bajo la curva... eso lo veremos más tarde; de momento nos vamos a conformar con ver las relaciones entre la suma de Riemann y la integración).

De hecho, vamos a verlo para el caso:

$$\int_0^1 x^2\, dx$$

Es continua y, por lo tanto, integrable. Gráficamente vamos a hacer:



Donde:

El 1/n,2/n,3/n… no es sino el (segmento 1) / n (xi1/1), el (segmento 2) / n (xi2/n), el (segmento 3) / n (xi3/n)… donde n tiende a infinito, es decir, estos segmentos (puntos) son dx, igualmente pequeños, infinitesimales. Segmentos divididos por tantas veces como 'seccionemos' el intervalo.

$$x_{i\ (base\ rectángulos)} = \frac{i}{n}$$

$$x_i^{*(evaluación\ y)} = \frac{i}{n}$$

Según la definición por la suma de Riemann sería:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

Entonces, de lo que estamos hablando es de:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

Tendiendo n a infinito, dx tiende a 0, que es lo que buscamos, que sea muy pequeño.

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n}$$

Como 'n' es una constante, podemos sacarlo del sumatorio:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Tenemos una fórmula para el sumatorio de los cuadrados perfectos:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Si evaluamos este límite, por ejemplo, por L'Hopital-Bernoulli, tenemos que es = 1/3. Es decir:

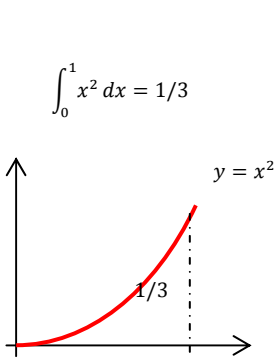
$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

Que es el Área bajo la curva entre 0 y 1 (de hecho, para x=1, ésta es su antiderivada). De hecho, podemos seguir jugando con los números:

$$3 \cdot \int_0^1 x^2\,dx = 3 \cdot \frac{1}{3}$$

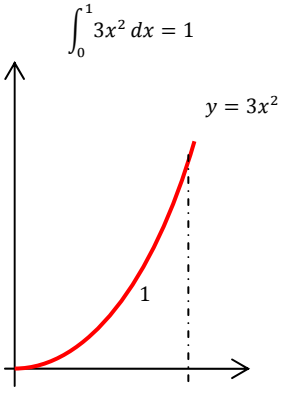
$$\int_0^1 3x^2\,dx = 1$$

Esto es:



'Estiramos' hacia arriba, 3 veces, la curva.

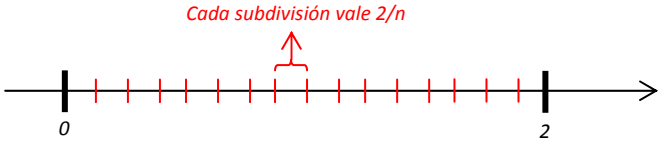
Con esto lo que queremos decir es que podemos deformar las para usarlas como "mini partes' de otras áreas para poder calcular dichas últimas áreas.



Veamos ahora el caso:

$$\int_0^2 x^3\,dx$$

Lo primero que vamos a hacer es dividir el intervalo [0,2] en todas las partes que 'vayamos a necesitar' *(aquí se ve claro qué era aquello de 1/n,2/n,3/n,…)*:



Es decir, cada 'rectángulo' tendrá de base *2/n*, por lo que el total del intervalo estudiado tendrá un largo de *(2/n)·i (es decir, (2/n) por el número de veces que aparece en el intervalo)*:

$$x_i = \frac{2}{n} \cdot i$$

Donde:

$$x_0 = 0 \;\&\; x_n = 2$$

¿Cuáles van a ser los puntos en que evalúe la altura? Ya podemos imaginar que, siendo la base de los rectángulos infinitamente pequeña, podremos decir que:

$$x_i^* = x_i$$

Sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Por la definición que hemos hecho para este problema:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2}{n} \cdot i\right) \cdot \left(\frac{2}{n}\right)$$

2/n porque sabemos que todas las particiones tienen la misma anchura, como hemos definido anteriormente.

Para el caso de la función cúbica que nos ocupa:

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n} \cdot i\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{16}{n^4} \cdot i^3$$

Es decir:

$$\int_0^2 x^3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{16}{n^4}\cdot i^3$$

Sabemos que $\frac{16}{n^4}$ es una constante y, además, tenemos una fórmula para el $\sum_{i=1}^{n} i^3$ por lo que:

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\cdot\left(\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2\cdot(n+1)^2}{n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+8n+1}{n^2}$$

Por L'Hopital-Bernoulli podemos saber que ése límite es = 4. Es decir:

$$\int_0^2 x^3\,dx = 4$$

¿Y si lo hacemos sobre otro intervalo? (recordemos que, en este caso, el [0,2] ha tomado 'efecto' en el desarrollo en que las subdivisiones del intervalo 'midieran' 2/n).

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$$

Esto es fácil de obtener sustituyendo oportunamente en el proceso que hemos detallado para [0,2].

¿Y si el cambiamos de nuevo el intervalo? Por ejemplo:

$$\int_1^2 x^3\,dx = ¿\,?$$

Es obvio que:

$$\int_0^2 x^3\,dx = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 x^3\,dx$$

Por lo que:

$$\int_1^2 x^3\,dx = \int_0^2 x^3\,dx - \int_0^1 x^3\,dx = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Veamos algunos ejemplos (este ejercicio tiene dentro muchos trucos que hay que interiorizar bien):

$$\int_2^{19} (10x - 9)\, dx$$

Es útil hacer un 'mapa' mental de hacia dónde queremos ir. Sabemos que el **ancho de los rectángulos** debe ser:

$$\frac{19-2}{n}$$

Así, la coordenada del **lado derecho** (nos piden Right Riemann Sum) de cada rectángulo *(i)* será:

$$2 + \frac{19-2}{n} \cdot i$$

De donde **la altura** será:

$$f\left(2 + \frac{19-2}{n} \cdot i\right)$$

Es decir, el **área de cada rectángulo** será:

$$\left(f\left(2 + \frac{19-2}{n} \cdot i\right)\right) \cdot \left(\frac{19-2}{n}\right)$$

Luego **la suma del área de todos los rectángulos**, la suma de Riemann, será:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(2 + \frac{19-2}{n} \cdot i\right) \cdot \left(\frac{19-2}{n}\right)$$

Recordemos que la función es $10x - 9$, luego:

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(10\left(2 + \frac{19-2}{n} \cdot i\right) - 9\right) \cdot \left(\frac{17}{n}\right)$$

Sabemos que $\left(\frac{17}{n}\right)$ es una constante, luego podremos sacarlo del sumatorio:

$$= \frac{17}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(10\left(2 + \frac{19-2}{n} \cdot i\right) - 9\right)$$

$$= \frac{17}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(20 + \frac{190-20}{n} \cdot i - 9\right)$$

$$= \frac{17}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(11 + \frac{170}{n} \cdot i\right)$$

$$= \frac{17}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (11) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{170}{n} \cdot i\right)\right)$$

El primer sumatorio es n veces 11, es decir:

$$= \frac{17}{n} \cdot \left(11n + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{170}{n} \cdot i\right)\right)$$

$$= \frac{17}{n} \cdot 11n + \frac{17}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{170}{n} \cdot i\right)\right)$$

$$= 187 + \frac{17}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{170}{n} \cdot i\right)\right)$$

Sobre el segundo sumatorio, podemos sacar la constante:

$$= 187 + \frac{17}{n} \cdot \frac{170}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} (i)\right)$$

$$= 187 + \frac{2890}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} (i)\right)$$

El sumatorio que tenemos, sabemos que se resuelve:

$$= 187 + \frac{2890}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= 187 + \frac{2890 \cdot n(n+1)}{2n^2}$$

$$= 187 + 1445 \cdot \frac{n(n+1)}{n^2}$$

$$= 187 + 1445 \cdot \frac{(n+1)}{n}$$

$$= 187 + 1445 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Ahora, finalmente, podemos evaluar el límite de la suma de Riemann, es decir:

$$\int_{2}^{19} (10x - 9)\, dx = \lim_{n \to \infty} R_n$$

$$\int_{2}^{19} (10x - 9) = \lim_{n \to \infty} 187 + 1445 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\int_2^{19} (10x - 9) = 187 + 1445 \cdot (1 + 0)$$

$$\int_2^{19} (10x - 9) = 187 + 1445 = 1632$$

Veamos otro ejemplo (mediante la definición de integral y aplicando Right Riemann Sum):

$$\int_1^{15} (2 - x)\, dx = ¿?$$

Procedamos:

¿Cuál es la base de los rectángulos?

$$\frac{15 - 1}{n}$$

¿Dónde vamos a medir la altura?

$$1 + \frac{15 - 1}{n} \cdot i$$

¿Cuál es la altura?

$$f\left(1 + \frac{15 - 1}{n} \cdot i\right) = \left(2 - \left(1 + \frac{15 - 1}{n} \cdot i\right)\right) = \left(1 - \frac{15 - 1}{n} \cdot i\right)$$

Luego, haciendo la suma derecha de Riemann:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{15 - 1}{n} \cdot i\right) \cdot \left(\frac{15 - 1}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{14}{n} \cdot i\right) \cdot \left(\frac{14}{n}\right)$$

$$= \frac{14}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{14}{n} \cdot i\right)$$

$$= \frac{14}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} (1) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{14}{n} \cdot i\right)\right)$$

$$= \frac{14}{n}\left(n - \frac{14}{n}\sum_{i=1}^{n}(i)\right)$$

$$= \frac{14}{n}\left(n - \frac{14}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= 14 - \left(\frac{196}{n^2}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right)$$

$$= 14 - 98\left(\frac{n(n+1)}{n^2}\right)$$

$$= 14 - 98\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Ahora evaluamos el límite:

$$\int_1^{15}(2-x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 14 - 98\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= 14 - 98(1+0)$$

$$\int_1^{15}(2-x)\,dx = 14 - 98 = -84$$

Veamos otro ejemplo (mediante la definición de integral y aplicando Right Riemann Sum):

$$\int_2^{14}(-x-5)\,dx = ¿\,?$$

¿Cuál es el ancho de cada rectángulo?

$$\frac{14-2}{n} = \frac{12}{n}$$

¿Dónde vamos a medir la altura? A la derecha de los rectángulos:

$$2 + \frac{12}{n}\cdot i$$

¿Cuál es la altura de los rectángulos?

$$f\left(2 + \frac{12}{n}\cdot i\right) \to \left((-1)\cdot\left(2 + \frac{12}{n}\cdot i\right) - 5\right)$$

¿Cuál sería, entonces la suma derecha de Riemann?

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}\left((-1)\cdot\left(2 + \frac{12}{n}\cdot i\right) - 5\right)\cdot\frac{12}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(-2 - \frac{12}{n} \cdot i \right) - 5 \right) \cdot \frac{12}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-7 - \frac{12}{n} \cdot i \right) \cdot \frac{12}{n}$$

$$= \frac{12}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(-7 - \frac{12}{n} \cdot i \right)$$

$$= \frac{12}{n} \cdot \left(-7n - \frac{12}{n} \sum_{i=1}^{n} (i) \right)$$

$$= \frac{12}{n} \cdot \left(-7n - \frac{12}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \left(-\frac{12 \cdot 7n}{n} - \frac{12}{n} \cdot \frac{12}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= -84 - \frac{144}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= -84 - 72 \cdot \frac{n(n+1)}{n^2}$$

$$= -84 - 72 \cdot (1 + \frac{1}{n})$$

Ahora podemos evaluar:

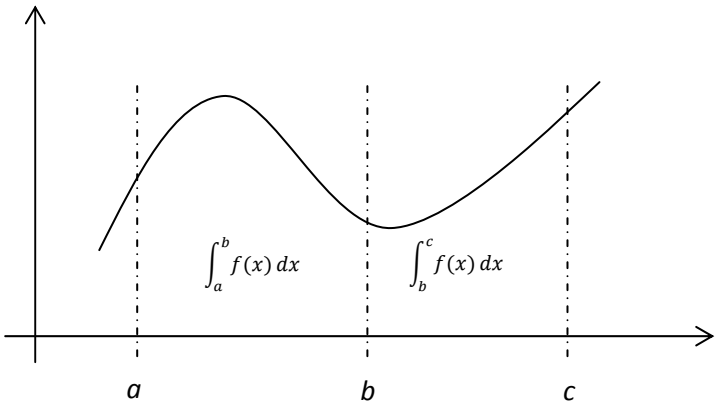
$$\int_2^{14} (-x - 5)\, dx = \lim_{n \to \infty} -84 - 72 \cdot (1 + \frac{1}{n})$$

$$= -84 - 72 \cdot (1 + 0)$$

$$\int_2^{14} (-x - 5)\, dx = -156$$

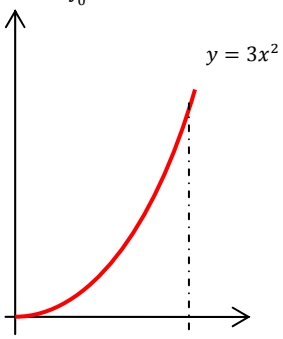
Como resumen, en todo este epígrafe hemos visto (como ya hicimos con la derivación) cómo resolver una integral haciendo uso de su definición. Obviamente, como pasaba con la derivada, esto es muy tedioso. Por supuesto, existen reglas de integración rápida, como vamos a ver en breve.

Propiedades de la integración.



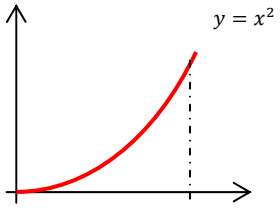
$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

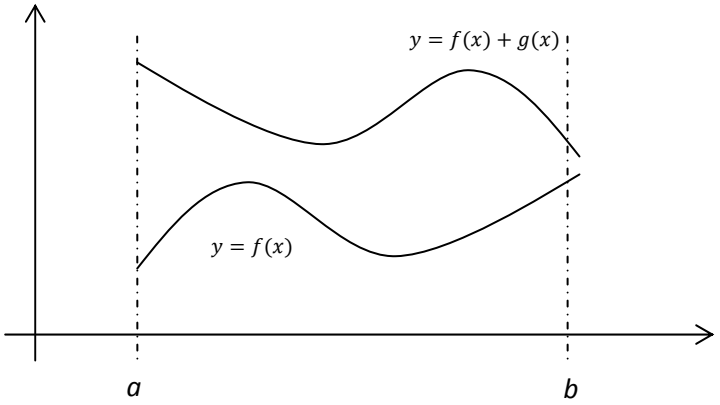
$\int_0^1 3x^2\,dx = 1$



$$\int_a^b K \cdot f(x)\,dx = K \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$





$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Teorema fundamental del cálculo.

Formulación del Teorema Fundamental del Cálculo:

Supongamos:

$$f: [a, b] \to R \; es \; continua$$

Sea F la función acumulación dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Entonces:

$$F \; es \; continua \; en \; [a, b], diferenciable \; en \; (a, b) \; y \; F'(x) = f(x)$$

Veámoslo más claro. Supongamos que:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

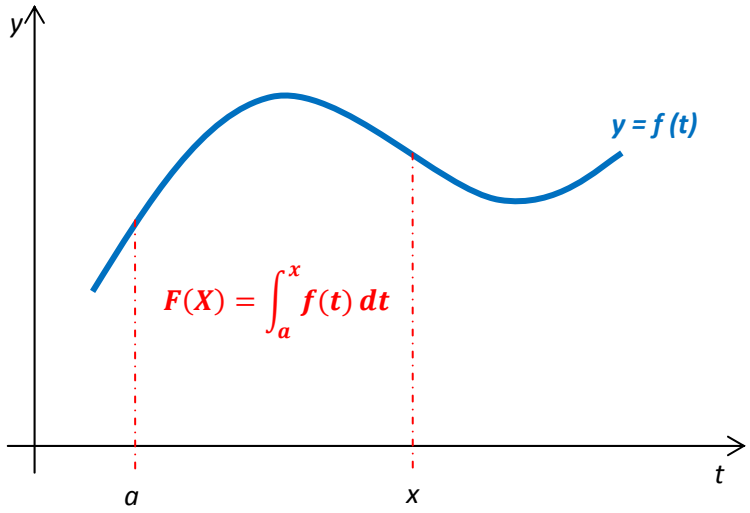
La función acumulación es (*F(x)*). Así:

$$La \; función \; acumulación \; está \; creciendo, es \; decir, F'(x) > 0 \; si \; f(x) > 0$$

$$La \; función \; acumulación \; está \; decreciendo, es \; decir, F'(x) < 0 \; si \; f(x) < 0$$

Lo cual nos está diciendo que entre *F'(x)* y *f(x)* hay algún tipo de relación (he ahí el 'leitmotiv' del Teorema Fundamental del Cálculo).

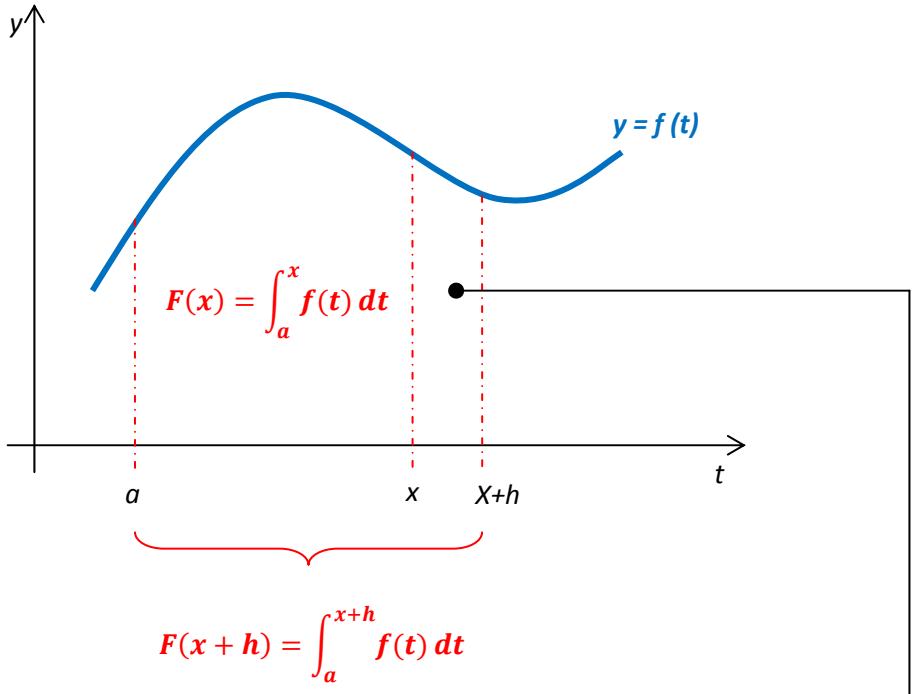
Veámoslo gráficamente:



El área bajo la curva, delimitada por [a,x] es la función acumulación ***F(x)***.

Ahora, ¿cuál es la derivada de la función acumulación ***F(x)***?

Sabemos que la derivada son ratios de modificación, cómo cambia la función en pequeños incrementos. Supongamos pues, ahora, este otro escenario, en el que aportamos un incremento:



Por lo que:

$$F(x+h) - F(x)$$

Sabemos que ése área es ,'casi', un pequeño (infinitesimal) rectángulo de altura *f(x)* y base *h*. Es decir, podremos decir que:

$$F(x+h) - F(x) \approx h \cdot f(x)$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$$

¡Maravilloso! Esto nos suena… ¿ehn? ¿A qué? Pues cuando calculamos el límite cuando h -> 0 … estamos ante la definición formal de derivada, es decir, que:

$$F'(x) = f(x)$$

¡Y esto es la madre del cordero del Teorema Fundamental del Cálculo! Que la función acumulación, LA INTEGRAL, bajo una curva es la ANTIDERIVADA de la función de la curva. Sobre esa relación habla el Teorema Fundamental del Cálculo. Sobre el hecho de que:

$$\int_a^x f(t)\,dt \; sea \; una \; ANTIDERIVADA$$

Veamos una aplicación rápida de esto.

Supongamos que $\int_4^7 f(x)\,dx = 3$ y que $f(7) = 1$. ¿Cómo podremos calcular $\int_4^{7.3} f(x)\,dx$?

Ok. Sabemos que:

$$F(x+h) - F(x) \approx h \cdot f(x)$$

Sabemos que $\int_4^7 f(x)\,dx = 3$, es decir que $F(x) = 3$

Sabemos que $f(7) = 1$

Nos preguntan por $\int_4^{7.3} f(x)\,dx = F(x+h)$…

Vemos fácilmente que:

$$F(x+h) = \big(h \cdot f(x)\big) + F(x)$$

$$F(x+h) = (0.3 \cdot 1) + 3 = 3.3$$

<u>Cálculo de integrales definidas</u>

Sencillamente, mediante el **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO**, podremos decir que suponiendo que f(x) es continua en el intervalo real [a,b] y F es la antiderivada de f, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

<u>Hagamos una prueba, usando el Teorema fundamental del Cálculo (TFC), con la siguiente función:</u>

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

Llamemos f(x) a sin x.

Busquemos su antiderivada (bastante fácil):

$$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$$

Así, mediante el TFC, podremos decir que:

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = (-\cos \pi) - (-\cos 0)$$

$$= \big(-(-1)\big) - \big(-(1)\big) = 1 + 1 = 2$$

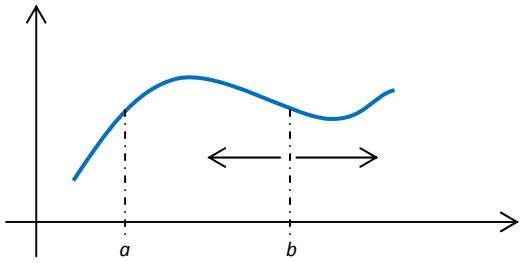
El área, la función acumulación, la integral es = 2 unidades cuadradas, 2 u^2

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2\ u^2$$

En este epígrafe hemos visto, en definitiva, que la función acumulación implica que:

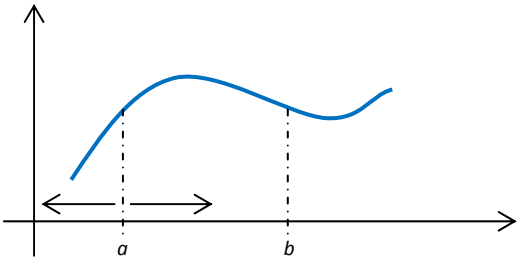
$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b)$$

(ojo, derivamos la función acumulación, no sobre x, sino respecto a 'b', el margen derecho de intervalo. El resultado es obvio: la 'derivada de la antiderivada' es la función original, en este caso, evaluada en el punto (b)). En un gráfico como el siguiente lo que movemos infinitesimalmente es 'b', el diferencial que se mueve es 'b'.

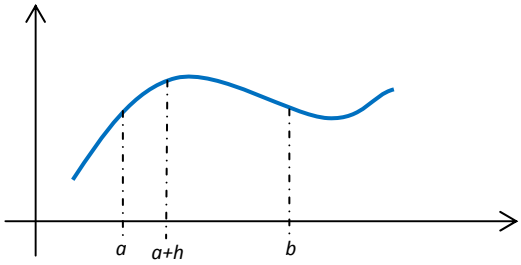


¿Qué sucede si lo hacemos con respecto al 'margen izquierdo': 'a'?

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = ¿?$$



Ahora, para este caso, el escenario sería, no como en ocasiones anteriores, así:



Si planteo esto algebraicamente podremos decir que:

(ojo, yo haría esto al revés… pero por utilidad ulterior se usa esta formulación que nos introduce un signo negativo…)

$$\int_{a+h}^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^{a+h} f(x)\,dx$$

Que, como es, 'casi, un rectángulo, podremos definir así:

$$\int_{a+h}^{b} f(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int_{a}^{a+h} f(x)\,dx \approx -h \cdot f(a)$$

Es decir, que podremos decir que:

$$\frac{\int_{a+h}^{b} f(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx}{h} = -f(a)$$

Es decir:

$$\frac{d}{da}\int_{a}^{b} f(x)\,dx = -f(a)$$

Esta conclusión 'negativa' tiene todo el sentido del mundo pues, si estamos moviendo hacia la derecha el margen izquierdo, estamos reduciendo el área… 'sumándole' un área negativa.

Finalmente, comparando, tenemos que:

$$\frac{d}{db}\int_{a}^{b} f(x)\,dx = f(b)$$

$$\frac{d}{da}\int_{a}^{b} f(x)\,dx = -f(a)$$

Es decir, podemos llegar a que:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int_{b}^{a} f(x)\,dx$$

Explicaciones definitivas

Integrales 3. Técnicas de antiderivación I.

Vamos a verlo en dos partes:

3.1- La regla de u-sustitución.

3.1.1- La regla de u-sustitución.

La regla de la sustitución es la inversa de la regla de la cadena que tanto usamos en la derivación. Se le llama la regla *u-substitution*.

3.1.2- Varias u-sustituciones.

3.2- Técnicas propias de antiderivación.

3.1.1- La regla de u-sustitución

Vamos a estudiar esta regla mediante la presentación de ejemplos.

Primer caso:

$$\int x \sin(x^2)\, dx = ¿\,?$$

Llamaremos 'u' a la 'función interna'. Es decir en este caso llamaremos:

$$u = x^2$$

Y a su derivada respecto a x:

$$\frac{d}{dx}u = 2x, de\ donde\ \rightarrow\quad du = 2x\, dx$$

Ahora vemos que, corrigiendo un poco el origen, tenemos un punto de partida buenísimo para alcanzar nuestro objetivo:

$$\frac{1}{2}\int 2 \cdot x \sin(x^2)\, dx$$

Ahora sustituyamos por los términos que hemos definido antes. Podemos traducir lo anterior por:

$$\frac{1}{2}\int 2 \cdot x \sin(x^2)\, dx \rightarrow \frac{1}{2}\int \sin u\, du$$

El papel de las dx, du, como ya sabemos, no es nada baladí. Son el incremento. Recordemos que la antiderivada la podemos presentar como un área en el que multiplicamos la altura (la

función) por la base, por el diferencial de la base (cuánto cambia la variable independiente). En este sentido, la dx, du etc… nos está indicando cuál es la variable independiente…, en definitiva, para qué 'fragmento incremento' se 'aplica' la función. En el caso de 'du' es un incremento que depende, a su vez, de otro incremento ('dx'). Es una especie de clave de traducción.

De hecho tengo la idea errónea en la cabeza de "sustituir" de nuevo, al final, 'du' por lo que valía en términos de 'x', pero ¡NO! Error total. La clave está en pensar que esa 'du' lo que hace es 'incorporar' la clave, en términos de 'x' que permitirá antiderivar la función en función de 'u'. **'du', en cierto modo, 'modifica' la función original para que pueda ser antiderivable en función de 'u'**. Hace su trabajo transformando las cosas, modificando, en el caso que nos ocupará abajo (en el siguiente ejercicio), el -18x del numerador. Una vez transformada la función original en el modo que nos obliga 'du, es decir, una vez que 'du' ha hecho ya su trabajo, podemos seguir el proceso de antiderivación (naturalmente no hay que volver a sustituir 'du' por nada… eso no pinta nada aquí)…digamos, que 'du' ya ha preparado la función para que podamos seguir 'el camino de la 'u'', es decir, se pueda antiderivar en función, exclusivamente, de 'u'.

Ahora podemos resolver la antiderivada:

$$= \frac{1}{2} \cdot (-\cos u) + C$$

¡Ojo!, pero no la queremos en función de 'u', sino de 'x', luego:

$$= \frac{1}{2} \cdot (-\cos x^2) + C$$

Que es la antiderivada que buscamos.

La mayor parte de la creatividad y del éxito del proceso de antidiferenciación radica en elegir una buena 'u'.

Para profundizar en esto, probemos ahora con:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-9x^2}}dx = ¿?$$

Vamos a proponer la siguiente 'u':

$$u = 4 - 9x^2 \quad \& \quad du/dx = -18x \rightarrow \quad du = -18x\,dx$$

Arrrgggg, pero no tenemos ése (-18) por ningún lado… Ok, nada que no podamos solucionar tunenando un poco el origen:

$$\frac{1}{-18}\int \frac{-18x}{\sqrt{4-9x^2}}dx$$

Ahora, podemos sustituir sin problemas:

$$\frac{1}{-18}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du$$

Que es lo mismo que:

$$\frac{1}{-18}\int u^{-1/2}\,du$$

Por la simple regla de la potencia, podemos despejar la antiderivada:

$$\frac{1}{-18}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C \rightarrow \frac{-1}{9}\sqrt{u} + C$$

No esperes sustituir ninguna 'du'…ella ya hizo su trabajo. Sólo nos queda sustituir 'u':

$$\frac{-1}{9}\sqrt{4-9x^2} + C$$

Seleccionar una buena 'u' es todo un arte. La verdadera clave para que todo salga bien. Veamos un ejemplo de una función muy similar a la anterior y veamos cómo la misma estrategia no nos lleva a ninguna parte, cómo hay que usar otra estrategia y cómo ésta nos lleva a un camino muy diferente.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx = ¿?$$

Ufanos, jactanciosos y emocionados por el éxito anterior haremos lo siguiente:

$$u = 4 - 9x^2$$

Ahora:

$$\frac{du}{dx} = -18x \quad \rightarrow \quad du = -18x\,dx$$

Bien, voy de puta madre! Cojonudo… pero…eee…. Antes podía 'tunear' la función origen mediante la inclusión de una constante…. Pero ahora resulta que necesito meter una 'x', meter algo que está cambiando…en definitiva: cargarme la función, inventarme una nueva… resulta pues, que no puedo usar esa 'u'…Tendremos que buscar otra… Miremos la función nuevamente y pensemos en otra alternativa:

Nota: en el ejemplo que estoy siguiendo la estrategia es busca en el denominador algo del tipo 1 +/- algo al cuadrado, algo que nos acerca a una antiderivada de tipo 'arcsin'… eso justifica los siguientes cambios:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{9}{4}x^2}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2}}dx$$

Ahora, voy a proponer una sustitución:

$$u = \frac{3}{2}x$$

Donde:

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{2} \quad \rightarrow du = \frac{3}{2}dx$$

Ahora sí podremos introducir esta 'clave de traducción' pues es una constante · dx (naturalmente, no podremos tomar 'ues' con exponente x más alto de 1 porque, al derivarlas, no nos daría un valor constante, sino otra dependencia de 'x').

Observemos que tenemos ya un ½ dx, por lo que sólo tendremos que añadir el '3' (y el correspondiente 1/3 fuera que lo anule) para que coincida con nuestra 'clave de traducción':

$$\frac{1}{3}\cdot\int \frac{3du}{2\sqrt{1-(u)^2}}$$

$$\frac{3}{6}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-(u)^2}}du$$

Ya tenemos lo que queríamos:

$$\frac{1}{3}\arcsin u + C$$

Ahora sustituimos 'u' y tenemos el resultado final:

$$\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3}{2}x\right) + C$$

Resultado que, como vemos, no tiene nada que ver con el que obtuvimos para el caso anterior.

Veamos otro caso aplicado a una integral definida (una vez encontrada la antiderivada, el intervalo de cálculo no implica dificultad añadida alguna):

$$\int_{x=0}^{2} 2x\,(x^2+1)^3 dx$$

Definamos 'u' y su 'clave de traducción':

$$u = x^2 + 1 \quad \& \quad \frac{d}{dx}u = 2x \rightarrow du = 2x\,dx$$

Sustituyamos:

$$\int_{x=0}^{2} (u)^3 du$$

Que podemos resolver simplemente mediante la regla de la potencia:

$$\int_{x=0}^{2} (u)^3 du = \frac{u^4}{4}\,(evaluada\ en\ x \in [0,2])$$

Sustituimos 'u':

$$= \frac{(x^2+1)^4}{4}\ (evaluada\ x \in [0,2])$$

$$= \frac{(2^2+1)^4}{4} - \frac{(0+1)^4}{4} = 156$$

Como vemos hemos esperado a tenerlo todo en función de 'x' para despejar. Correctísimo.

Pero podríamos haber modificado el intervalo para resolverlo todo en función de 'u', es decir, no haber tenido que esperar a dejarlo todo en base a 'x'. Así, en el momento de:

$$\int_{x=0}^{2} (u)^3 du = \frac{u^4}{4}$$

Siendo:

$$u = x^2 + 1, \qquad para\ \ x = 0 \rightarrow u = 1 \quad \& \quad para\ \ x = 2 \rightarrow u = 5$$

Luego sería:

$$\int_{u=1}^{5} (u)^3 du = \frac{u^4}{4}\ (evaluada\ en\ u \in [1,5])$$

Es decir:

$$= \frac{5^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 156$$

Justo como ya habíamos obtenido en función de 'x'.

3.1.2- Varias u-sustituciones.

Imaginemos una función de aspecto tan horrorosamente lamentable como la siguiente:

$$\int -2\cos x \sin x \cos(\cos^2 x + 1)\, dx$$

Propongamos una primera 'u':

$$u = \cos x \quad \& \quad du = -\sin x\, dx$$

Sustituyamos:

$$\int 2\, u \cos(u^2 + 1)\, du$$

Ahora vamos a hacer otra sustitución: 'w':

$$w = u^2 + 1 \qquad \& \qquad \frac{d}{du} w = 2u \rightarrow dw = 2u\, du$$

Luego ahora podemos decir que:

$$\int \cos(w)\, dw$$

Ahora podemos antidiferenciar sin problema:

$$\int \cos(w)\, dw = \sin w + C$$

Ahora empezamos la cadena de sustituciones hasta que lleguemos a 'x':

$$= \sin(u^2 + 1) + C$$

Volvemos a sustituir:

$$= \sin(\cos^2 x + 1) + C$$

Y ya está.

Veamos algunos ejercicios generales.

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \right) \left(\frac{-1}{x^2}\right) dx$$

Sabiendo que $\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ es la derivada de 1/x, tenemos mucho avanzado. Propongamos 1/x=u.

$$u = \frac{1}{x} \qquad \& \qquad du = \left(\frac{-1}{x^2}\right) dx$$

Sustituyendo:

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right) du$$

Que, por las tablas de derivadas, sabemos que es:

$$\arccos(u) + C$$

Y ahora, retornando a la 'x':

$$\arccos\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

Otro caso:

$$\int \sec e^x \tan e^x \, e^x dx$$

Proponemos:

$$u = e^x \quad \& \quad du = e^x dx$$

Sustituyendo:

$$\int \sec u \tan u \, e^x du$$

Sabemos que la antiderivada de esta función es:

$$\sec u + C$$

Volviendo a la 'x':

$$sec\, e^x + C$$

Otro caso: RACIONAL SIMPLE.

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4X+3}}\,\boldsymbol{dx} = ¿\,?$$

Estrategia: buscar un 1/x cuya antiderivada es ln |x|.

Proponemos:

$$u = 4x + 3 \quad \& \quad du = 4\,dx$$

'Arreglemos' la original:

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{4X+3} 4\,dx$$

Sustituimos por 'u du':

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{u} du$$

Ahora es muy simple, ¿qué función tiene como derivada lo siguiente?

$$\frac{1}{4}\ln|u| + C$$

Volvemos al 'terreno x':

$$\boldsymbol{\frac{1}{4}\ln|4x+3 \quad | + C}$$

Nota: el 'truco' para coger una buena 'u' es tener clara la estrategia hacia la queremos ir… en qué queremos convertir la función para que podamos imaginar una antiderivada fácil.

Otro caso. Tipo: RACIONAL COMPLETANDO EL CUADRADO EN EL DENOMINADOR.

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2+4x+7}} = ¿?$$

Estrategia: buscamos un $\frac{1}{x^2+1}$ cuya antiderivada es $\arctan x + C$.

Necesito tener abajo 'un algo' al cuadrado + 1, para ello habré de COMPLETAR EL CUADRADO para acercar el polinomio del denominador a lo que necesito.

Teniendo en mente nuestro objetivo, vamos a ponernos a trabajar en el denominador usando el álgebra. Sabemos que el polinomio debe ser:

$$x^2 + 4x + 7 = (x + algo)^2 + algo$$

Es decir, tenemos que transformar el polinomio original en esto otro:

$$(x + a)^2 + b = x^2 + 2ax + a^2 + b$$

Vemos que:

$$2ax\ debe\ ser = 4x$$

De donde deduciremos que:

$$a = 2$$

Ahora vamos a por b. Ya tenemos que:

$$(x + 2)^2 + b = x^2 + 4x + 7$$

$$x^2 + 4x + 4 + b = x^2 + 4x + 7$$

De donde:

$$b = 3$$

Por lo que tenemos nuestro denominador como :

$$(x + 2)^2 + 3$$

Pero estamos buscando algo del tipo:

$$(algo)^2 + 1$$

Ahora nos tendremos que ocupar de ése '3' que nos molesta:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 7}\, dx = \int \frac{1}{(x + 2)^2 + 3}\, dx$$

Para ello multiplicamos por 1/3 fuera y por 3 dentro (hay que tener en cuenta que un 3 en el numerador es como 1/3 en el denominador):

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{1}{3}(x+2)^2+1}\,dx$$

Vamos a hacer la u-sustitución:

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}^*}(x+2) \quad \& \quad du = \frac{1}{\sqrt{3}}\,dx$$

*Nota: naturalmente para 'meter' es 1/3 en el 'paquete' que está al cuadrado, hay que ponerlo en el modo de raíz cuadrada.

Ojo, pero ahora tenemos el problema de que no tenemos un $\frac{1}{\sqrt{3}}\,dx$…bueno, como es una constante, no tendremos problema en meterlo:

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}^*}\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}dx$$

*Nota: Es obvio pues: $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ahora sustituimos '*u du*':

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

Ahora ya podemos antiderivar:

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan u + C$$

Que, retornando al 'mundo de la 'x'':

$$= \mathbf{\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)\right) + C}$$

Otro caso: UN PRODUCTO.

$$\int_{x=0}^{1} (x+10)\,(x-1)^{10}\,dx = ¿\,?$$

Una primera intención sería expandir el polinomio… que nos iba a dar un pepinako de largo… Querríamos hacer eso para facilitar la cosa pero en realidad estaríamos haciendo algo más difícil que el propio proceso de integración que estamos abordando.

Hagamos, mejor, una u-sustitución:

$$u = x - 1 \qquad \& \qquad du = dx$$

De donde sabremos que (buen truco! Una especie de 'sustitución reversible'):

$$x = u + 1$$

Sustituyamos:

$$\int_{x=0}^{1} (x+10)\,(x-1)^{10}\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} (u+1+10)\,(u)^{10}\,du = \int_{x=0}^{1} (u+11)\,(u)^{10}\,du$$

$$= \int_{x=0}^{1} (u^{11} + 11u^{10})\;du$$

$$= \int_{x=0}^{1} (u^{11})\;du + \int_{x=0}^{1} (11u^{10})\,du$$

$$= \frac{u^{12}}{12} + \frac{11u^{11}}{11} = \frac{u^{12}}{12} + u^{11}(a\ evaluar\ en\ x\ \in [0,1])$$

Ahora, como hemos decidido evaluar en 'x', volvemos al 'mundo x':

$$\frac{(x-1)^{12}}{12} + (x-1)^{11}\ (a\ evaluar\ en\ x\ \in [0,1])$$

Es decir:

$$\left[\frac{(1-1)^{12}}{12} + (1-1)^{11}\right] - \left[\frac{(0-1)^{12}}{12} + (0-1)^{11}\right]$$

$$= -\left[\frac{(-1)^{12}}{12} + (-1)^{11}\right] = -\left[\frac{1}{12} - 1\right] = -\left[\frac{-11}{12}\right] = \mathbf{\frac{11}{12}}$$

Lo interesante mediante la 'u' sustitución es encontrar el camino más elegante, el más eficiente… el camino que te proteja de enfrentarte a un infierno aritmético en el que puedas cometer errores por despistes. Ésa es la clave del proceso, como hemos visto en este ejercicio.

Otro caso: RACIONAL CON DENOMINADOR RADICAL.

$$\int \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x+1}}}\boldsymbol{dx} = ¿?$$

Vamos a hacer un tipo de sustitución diferente. Esta vez en vez de despejar 'du' y esperar a tener suerte y que coincida con el 'residuo' que nos queda de la función, **vamos a despejar 'dx'**.

De momento, propongamos un 'u'. En casos como el que tenemos en este ejercicio, convien hacerlo por todo el denominador:

$$u = \sqrt[3]{x+1}$$

Esto, nos daría un 'du' rarísimo que difícilmente coincidirá con lo que nos queda de la función. Para poder sustituir fácilmente 'dx' nada mejor que sustituirla directamente, es decir, si 'u' es esto:

$$u = \sqrt[3]{x+1}$$

'x' será esto otro:

$$x = u^3 - 1$$

De donde 'dx':

$$\frac{dx}{du} = 3u^2 \quad , de\ donde, dx = 3u^2 du$$

Y ahora, podemos sustituir tanto 'u' como 'x', como 'dx':

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} dx = \int \frac{u^3 - 1}{u} 3u^2 du$$

Si expandimos:

$$\int \frac{3u^5 - 3u^2}{u} du = \int 3u^4 - 3u\, du = \frac{3}{5}u^5 - \frac{3}{2}u^2 + C$$

Ahora restituimos al 'mundo de la x':

$$\frac{3}{5}(\sqrt[3]{x+1})^5 - \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x+1})^2 + C$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C}$$

Nota: $\boldsymbol{(x+1)^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{x+1})^5 = \sqrt[3]{(x+1)^5}}$

Otro caso: RACIONAL CON DENOMINADOR RADICAL.

$$\int \frac{\boldsymbol{x^3}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+9}}}\boldsymbol{dx} = ¿?$$

Hagamos la sustitución de 'u' y busquemos una sustitución para 'dx':

$$u = \sqrt{x^2+9}$$

Ahora busquemos 'x':

$$x = \sqrt{u^2-9} \quad de\ donde, dx = \frac{u}{\sqrt{u^2-9}}du$$

Ahora sustituimos:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx = \int \frac{(\sqrt{u^2-9})^3}{u} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2-9}}du$$

$$= \int (\sqrt{u^2-9})^2\, du = \int u^2 - 9\, du$$

Ahora, antiderivamos:

$$\frac{u^3}{3} - 9u + C$$

Ahora restituimos 'x':

$$\frac{\sqrt{x^2+9}^3}{3} - 9\sqrt{x^2+9} + C$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}(x^2+9)\cdot\sqrt{x^2+9} - 9\sqrt{x^2+9} + C}$$

Otro caso: RACIONAL TRIGONOMÉTRICO.

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\mathbf{\cos} \boldsymbol{x}} \boldsymbol{dx} = ¿\,?$$

La estrategia que vamos a seguir es la de tratar de reducir la función a funciones trigonométrica simples de las que conozcamos su antiderivada. Para ello usaremos la igualdad trigonométrica fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

El primer paso que haremos para acercarnos a esta igualdad trigonométrica es completar la diferencia de cuadrados (técnica muy útil):

$$\int \frac{1}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x} dx = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{1-\cos^2 x} - \frac{\cos x}{1-\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{1-\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{1-\cos^2 x} dx$$

Usando la igualdad trigonométrica fundamental que mencionábamos:

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \int \csc^2 x\, dx - \int \csc x \cdot ctg\, x\, dx =$$

$$= \boldsymbol{-ctg\, x + \csc x + C}$$

Otro caso: RACIONAL CON DENOMINADOR RADICAL.

$$\int \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{2x^2+3}}}\boldsymbol{dx} = ¿?$$

Preparemos una 'u':

$$u = \sqrt{2x^2+3}$$

Como 'du' va a ser 'rarete', vamos mejor a por 'x' y 'dx':

$$x = \sqrt{\frac{u^2-3}{2}} \quad donde\ dx = \frac{u^*}{2\sqrt{\frac{u^2-3}{2}}}du$$

Nota *: en la regla de la cadena, la derivada de $\frac{u^2}{2} = u$.

Ahora sustituyamos:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{u^2-3}{2}}}{u} \cdot \frac{u}{2\sqrt{\frac{u^2-3}{2}}}du =$$

$$\int \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}u + C$$

Ahora restituimos la 'x':

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + C}$$

Otro caso: TRIGONOMÉTRICO.

$$\int \frac{\boldsymbol{\cos(\ln x)}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx} = ¿?$$

Sustituyamos 'u':

$$u = \ln x \quad de\ donde\ du = \frac{1}{x}dx$$

Esto nos lo pone muy fácil:

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \int \cos(u)\,du =$$

$$= \sin u + C$$

Restituimos la 'x':

$$= \boldsymbol{\sin(\ln x) + C}$$

Otro caso: RACIONAL CON DENOMINADOR RADICAL.

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\sqrt{\boldsymbol{x^3+1}}}\boldsymbol{dx} = ¿?$$

Propongamos una 'u' (hemos visto que estos casos de denominador radical con una sola 'x' lo mejor es sustituir completamente por 'u'):

$$u = \sqrt{x^3+1} \quad la\ du\ no\ nos\ va\ a\ servir$$

$$x = \sqrt[3]{u^2-1} \quad de\ donde\ dx = \frac{1}{3(\sqrt[3]{u^2-1})^2}2u\ du$$

Ahora sustituimos:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx = \int \frac{(\sqrt[3]{u^2-1})^2}{u}\cdot\frac{2u}{3(\sqrt[3]{u^2-1})^2}du =$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt[3]{u^2-1}\right)^2}{u}\cdot\frac{2u}{3\left(\sqrt[3]{u^2-1}\right)^2}du =$$

$$= \int \frac{2}{3}du = \frac{2}{3}u + C =$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C}$$

Otro caso.

$$\int_{\boldsymbol{x=1}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{(x+2)\,(x-2)^4 dx} = ¿?$$

Proponemos una 'u':

$$u = x - 2$$

$$x = u + 2 \quad donde\ dx = du$$

El intervalo [1,2] transformado 'al mundo u' es [-1,0]. Sustituimos:

$$\int_{u=-1}^{0} (u+2+2)\,(u)^4 du = \int_{u=-1}^{0} (u+4)\,(u)^4 du = \int_{u=-1}^{0} (u^5+4u^4)\,du =$$

$$= \frac{u^6}{6} + \frac{4u^5}{5} \quad (evaluado\ en\ u \to [-1,0])$$

$$= \left[\frac{0^6}{6} + \frac{4\cdot 0^5}{5}\right] - \left[\frac{-1^6}{6} + \frac{4\cdot -1^5}{5}\right] = \boldsymbol{\frac{19}{30}}$$

UN IMPORTANTE CASO: INTERVALO DE EVALUACIÓN QUE ES UNA FUNCIÓN.

$$\int_0^{x^2} \boldsymbol{\sin t\, dt} = ¿\,?$$

La antiderivada de la función es:

$$-\cos t + C$$

Pero hemos de evaluar en t=x^2 y en 0:

$$[-\cos x^2\, 2x] - [-\cos 0 \cdot 2 \cdot 0]$$

Nótese que al sustituir t por la función, hemos de aplicar la regla de la cadena. VER MEJOR.

Otro caso: UN SIMPLE CASO CON SOLUCIÓN TRIGONOMÉTRICA.

$$\int \left(\frac{\boldsymbol{-1}}{\sqrt{\boldsymbol{1-(x^7)^2}}}\right) \boldsymbol{7x^6 dx} = ¿\,?$$

Propongamos un 'u' (nos lo ponen a huevo):

$$u = x^7 \quad de\ donde\ du = 7x^6 dx$$

Nos lo han puesto a huevo:

$$\int \left(\frac{-1}{\sqrt{1-(u)^2}}\right) du = \arccos u + C = \arccos x^7 + C$$

Explicaciones definitivas

Integrales 4. Técnicas de antiderivación II.

REGLA DEL PRODUCTO O INTEGRACIÓN POR PARTES.

Hemos visto la regla de la cadena inversa, es decir, la regla de la u-sustitución. Ahora vamos a ver la regla del producto inversa.

Recordemos que la regla de la derivada del producto nos dice que:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integremos, ahora, en ambos lados:

$$\int \frac{d}{dx}\big(f(x)\cdot g(x)\big)dx = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx$$

Es decir:

$$f(x)\cdot g(x) + C = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx$$

Así que:

$$\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) + C$$

Seguimos desarrollando:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Digamos ahora que:

$$\boldsymbol{u = f(x)} \quad \& \quad du = f'(x)\,dx$$

$$w = g(x) \quad \& \quad \boldsymbol{dw = g'(x)\,dx}$$

Y sustituyendo:

$$\boxed{\int \boldsymbol{u}\ \boldsymbol{dw} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} - \int \boldsymbol{w}\,\boldsymbol{du}}$$

Veámoslo en acción con un ejemplo:

$$\int \boldsymbol{x\, e^x dx} = ¿\,?$$

Definamos las variables 'u' y 'dw':

$$u = x \qquad du = dx$$

$$w = e^x \qquad dw = e^x dx$$

Por la regla de la integración por partes sabemos que:

$$\int u\ dw = u \cdot w - \int w\, du$$

Así que sustituimos:

$$\int x\, e^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

Que podemos resolver fácilmente:

$$\int x\, e^x dx = \boldsymbol{xe^x - e^x + C}$$

Veamos otro caso similar.

$$\int \boldsymbol{(x^2 + x)\, e^x dx} = ¿\,?$$

Definamos las variables:

$$\boldsymbol{u = x^2 + x} \qquad du = 2x + 1\ dx$$

$$w = e^x \qquad \boldsymbol{dw = e^x dx}$$

Sustituyamos empleando la regla de la integración por partes:

$$= (x^2 + x)e^x - \int e^x \cdot 2x + 1\ dx$$

Expandamos el producto del lado derecho:

$$= (x^2 + x)e^x - \left[\int 2xe^x + e^x\ dx\right]$$

$$= (x^2 + x)e^x - \int 2xe^x\ dx - \int e^x\ dx$$

Es decir, tenemos ya una parte integrada (en azul):

$$= (x^2 + x)e^x - e^x - \int 2xe^x\ dx$$

Efectivamente, en el último término tenemos, de nuevo, la integral de un producto, así que volvemos a aplicar la regla de la integración por partes. Volvamos a definir las variables auxiliares:

$$\boldsymbol{u_2} = 2x \qquad du_2 = 2\,dx$$

$$w_2 = e^x \qquad \boldsymbol{dw_2} = e^x dx$$

Que, sustituyendo según la regla de la integración por partes:

$$\int 2xe^x\ dx = 2xe^x - \int e^x 2\,dx$$

Este último término lo podemos antiderivar fácilmente:

$$\int e^x 2\,dx = 2e^x$$

Cogemos todas las partes que hemos ido integrando y las ponemos todas juntas:

$$= (x^2 + x)e^x - e^x - [2xe^x - 2e^x]$$

Que es:

$$= (e^x x^2 + e^x x) - e^x - 2xe^x + 2e^x$$

$$= \boldsymbol{e^x x^2 - e^x x + e^x + C}$$

Veamos un caso CON UN INTERESANTE TRUCO (*dw=dx*).

$$\int \mathbf{ln\,x\,dx} = ¿\,?$$

Definamos las variables auxiliares:

$$\boldsymbol{u = ln\,x} \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$w = x \qquad \boldsymbol{dw = dx}$$

Ahora apliquemos la regla de la integración por partes:

$$= x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx$$

Podemos simplificar el último término:

$$= x\ln x - \int 1\;dx$$

Y lo podemos resolver fácilmente:

$$\boldsymbol{= x\ln x - x + C}$$

Veamos otro caso análogo CON UN INTERESANTE TRUCO (*dw=dx*).

$$\int \mathbf{(ln\,x)^2\,dx} = ¿\,?$$

Definamos las variables auxiliares (opto por 'meter' en 'u', todo aquello que no es 'dx'):

$$\boldsymbol{u = (ln\,x)^2} \qquad du = \frac{2\ln x}{x}\,dx$$

$$w = x \qquad \boldsymbol{dw = dx}$$

Sustituimos (en azul pondremos las partes 'terminadas'):

$$= x(ln\,x)^2 - \int x\frac{2\ln x}{x}\,dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x\;dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\;dx$$

Sabemos, del ejercicio anterior, que $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$, por lo que podemos proceder:

$$= x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - x]$$

$$\boldsymbol{= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C = x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2] + C}$$

Otro caso: EL MOMENTO EN QUE LA INTEGRAL VUELVE UNA Y OTRA VEZ SOBRE SÍ MISMA.

$$\int \boldsymbol{e^x \cos x\, dx} = ¿\,?$$

Definamos las variables auxiliares:

$$\boldsymbol{u = e^x} \qquad du = e^x\, dx$$

$$w = \sin x \qquad \boldsymbol{dw = cos\ x\, dx}$$

Sustituyamos según la regla de la integración por partes:

$$= e^x \sin x - \int \sin x\, e^x\, dx$$

Estamos ante la misma situación en el término derecho, tenemos que volver a aplicar la regla de la integración por partes. (OJO, DUDA!! VOY A DEFINIR LAS VARIABLES COMO LO HACE EL TÍO AL QUE ESTOY SIGUIENDO, PERO SI LO HICHIERA DEL MODO CONTRARIO…NO SALE….ESTO ES ASÍ???DE HECHO LO VOY A DEJAR COMO LO HICE AL PRINCIPIO Y, DESPUÉS, LO VOY A HACER COMO LO HACE EL NOTA (JIM FOWLER). AQUÍ COMO 'NO FUNCIONA'):

$$= e^x \sin x - \int \sin x\, e^x\, dx$$

$$\boldsymbol{u = sin\ x} \qquad du = \cos x\, dx$$

$$w = e^x \qquad \boldsymbol{dw = e^x\, dx}$$

$$= e^x \sin x - \sin x\, e^x - \int e^x \cos x\, dx$$

(EL ORIGEN DEL ERROR, CREO, RADICA EN QUE AQUÍ ESTARÍAN COEXISTIENDO DOS 'U' DEFINIDAS DE DIFERENTE MANERA. HE PUESTO LA DUDA EN COURSERA, A VER QUÉ ME DICEN… DESPUÉS LO PONGO AQUÍ)

AAARRGGGG, hemos vuelto al punto de inicio…y así hasta el infinito…, pero… magia potagia, recapitulemos:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \left[\sin x\, e^x - \int e^x \cos x\, dx\right]$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \sin x\, e^x + \int e^x \cos x\, dx$$

$$\int e^x \cos x\, dx - \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \sin x\, e^x$$

$$0 = 0$$

AAARRRGGGGG!!!, ¡Cuidado!, que nos sale una cosa tela de rara que no nos sirve para nada… Probemos a cambiar la definición de las variables auxiliares en la segunda vez que lo aplicamos (¡esto importa!). Veníamos de:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int \sin x\, e^x\, dx$$

Como decíamos, volvamos a definir las variables auxiliares (esta vez al revés de como lo hicimos antes):

$$\boldsymbol{u = e^x} \qquad du = e^x dx$$

$$w = -\cos x \qquad \boldsymbol{dw = sin\ x\ dx}$$

Ahora sustituyamos:

$$= e^x \cdot \sin x - [e^x \cdot (-cos\ x) - \int -cos\ x\ e^x\ dx]$$

$$= e^x \cdot \sin x - [e^x \cdot (-cos\ x) + \int cos\ x\ e^x\ dx]$$

$$= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot (-cos\ x) - \int cos\ x\ e^x\ dx$$

AAARRGGGG, hemos vuelto al inicio del bucle, pero esta vez a una posición útil! Ahora sí, magia potagia, ahora sí vamos a poder resolver el asunto. Antes llegábamos a un punto de 0=0…más raro que sus muertos… Ahora, con la sustitución que hemos hecho, llegamos a un punto mejor que nos permite resolver el problema.

(VER, POR QUÉ LA DEFINICIÓN AUXLIAR AFECTA TANTO Y QUÉ CRITERIOS HABRÍA QUE SEGUIR). Ok, ya tengo claro el criterio. A nada que uno piense se hace claro. Véase que en la fórmula que nos va resultando ya tenemos definida 'u' de una manera, es más, esa manera se conserva en la expresión resultante. 'u' está multiplicando al inicio y no ha cambiado. Al no haber cambiado, es necesario conservarla, pues al permanecer constante, no podemos cambiarla por la cara…estaríamos intercambiando productos que son iguales… Por eso, tenemos que seguir identificando a 'u' con e^x, porque 'esa clave está ya introducida y, además, sigue en uso. SOLUCIÓN A ESTE CALLEJÓN: EL CASO, DEFINITIVAMENTE, ES QUE EL ORDEN EN QUE SE ELIGEN LAS VARIABLES LA SEGUNDA VEZ QUE SE APLICA LA REGLA DE LA INTEGRACIÓN POR PARTES SÍ IMPORTA. Estuve preguntando en el foro del curso y un mentor insistía en que daba igual… pero nope…. No da igual. Hay que tener cuidado de no caer en una trampa tautológica, como hemos visto. Adjunto un link a Wikipedia donde se aborda, precisamente, esto. En definitiva, hay que sustituir intentando conservar variables que ya se hayan definido y si no hay criterio, pues sencillamente avanzar y, si vemos que llegamos a una tautología, retroceder y cambiar la definición de las variables auxiliares.

http://calculus.subwiki.org/wiki/Circular_trap_with_integration_by_parts

Recapitulemos desde el inicio:

$$\int e^x \cos x\ dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot (-cos\ x) - \int cos\ x\ e^x\ dx$$

Es decir que podemos decir que:

$$2\int e^x \cos x\ dx = e^x \sin x - e^x(-cos\ x)$$

De donde podemos despejar como:

$$\int e^x \cos x\ dx = \frac{e^x \sin x - e^x(-cos\ x)}{2}$$

Es decir:

$$\int e^x \cos x\ dx = \frac{\boldsymbol{e^x \sin x + e^x \cos x}}{\boldsymbol{2}}$$

Otro caso COMPLEJO E INTERESANTE.

A veces, hasta que no hacemos una sustitución no percibimos que estamos ante un problema resoluble mediante la regla de la integración por partes. Veamos un ejemplo:

$$\int \boldsymbol{e^{\sqrt{x}}dx} = ¿?$$

Vamos a proponer una 'u':

$$u = \sqrt{x} \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Obviamente, no vamos a poder sustituir '*dx*'… Despejemos, como ya hemos hecho tantas veces antes, '*x*' y '*dx*':

$$x = u^2 \qquad dx = 2u\,du$$

Sustituyamos nuestro problema:

$$\int e^u \cdot 2u\,du = ¿?$$

¡Eh! Aquí si vamos a poder emplear la regla de la integración por partes, es decir, sólo después de haber llevado a cabo una sustitución, hemos llegado a una expresión en forma de producto. Procedamos, pues (vuelve a pasarnos lo de la sustitución…me ha servido a la segunda opción…ya sabemos por qué):

$$\boldsymbol{r = 2u} \qquad dr = 2\,du$$

$$w = e^u \qquad \boldsymbol{dw} = e^u du$$

Apliquemos la regla de la integración por partes:

$$= 2u \cdot e^u - \int e^u\,2\,du$$

Esto ya lo podemos resolver sin problemas pues tenemos, en el integrando, una función por una constante. Así que:

$$= 2ue^u - 2e^u == 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$= \boldsymbol{2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C}$$

El resumen de este caso es que se pueden esconder 'productos', oportunidades para integración por partes, en funciones, como la que nos ocupa. Pero, ojo, no es oro todo lo que reluce, en algo tan aparentemente similar como esto: $\int \boldsymbol{e^{-x^2}dx}$**, no sirve! Ya explicaremos por qué.**

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS ELEVADAS A ALGO

Vamos a realizar varios ejercicios que, finalmente, nos harán comprender la utilidad de la integración por partes.

Otro caso: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CON EXPONENTES 'IMPARES'.

$$\int \sin^{2n+1} x \cos^{2n} x \, dx = ¿\,?$$

Esto es:

$$\int \sin^{\text{impar}} x \cos^{\text{par}} x \, dx = ¿\,?$$

(o viceversa)

Para resolver la integración de este tipo de funciones usaremos, entre otras, la importante identidad trigonométrica pitagórica: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Por ejemplo, probemos con esta antiderivada:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

Si probáramos desde el inicio alguna sustitución, veríamos, que no nos propone ninguna situación favorable. Sin embargo, si modificamos un poco la función y usamos la identidad pitagórica:

$$\int \sin \mathrm{x} \sin^2 x \cos^2 x \, dx =$$

$$= \int \sin x \, (1 - \cos^2 \mathrm{x}) \cos^2 x \, dx$$

Propongamos ahora esta 'u':

$$u = \cos x \qquad du = -\sin x \, dx$$

Esto casi nos permite hacer la sustitución sin problemas, a excepción del (-). Nada que no podamos tunear fácilmente:

$$= -\int -\sin x \, (1 - \cos^2 \mathrm{x}) \cos^2 x \, dx$$

$$= -\int (1 - u^2) u^2 du$$

Expandimos:

$$= -\int u^2 - u^4 du$$

Que es fácil de integrar:

$$= -\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right)$$

Restituimos:

$$= -\left(\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5}\right) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$$

Para afianzar esto, probemos de nuevo con esta antiderivada:

$$\int \sin^5 x \cos^5 x \, dx$$

Con el mismo fin de antes, podemos replantear la situación del siguiente modo:

$$\int \sin^5 x \, (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx =$$

$$\int \sin^5 x \, (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx =$$

Propongamos una 'u':

$$u = \sin x \qquad du = \cos x \, dx$$

Sustituimos:

$$\int u^5 \, (1 - u^2)^2 du =$$

Expandimos:

$$\int u^5 \, (u^4 + 1 - 2u^2) du = \int u^9 + u^5 - 2u^7 du = \cdots$$

Que, como es fácil apreciar, tiene antiderivada directa…

En resumen, podremos usar esta técnica cuando encontremos algo del tipo:

$$\int \sin^{\text{impar}} x \cos^{\text{lo que sea}} x \, dx = ¿\,?$$

ó

$$\int \sin^{\text{lo que sea}} x \cos^{\text{impar}} x \, dx = ¿\,?$$

En estos casos podremos presentarla como (para el primer caso):

$$\int \sin \text{x} \sin^{\text{par}} x \cos^{\text{lo que sea}} x \, dx = ¿\,?$$

Tal y como hemos visto en este caso particular.

Otro caso: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CON EXPONENTES 'PARES'.

Para resolver este tipo de integrales necesitaremos hacer uso de otra identidad trigonométrica fundamental (es cierto, las identidades trigonométricas siempre aparecen un poco como 'deus ex machinas'… pero el caso es que no son tantas, casi que con las dos que estamos empleando podemos hacer maravillas): la identidad del ángulo medio según la cual:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Supongamos que tenemos una función del tipo:

$$\int \mathbf{sin^4}\, \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx} = ¿?$$

$$\int (\sin^2 x)^2\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right)^2 dx =$$

Expandamos:

$$\int \frac{1}{4} + \frac{\cos^2(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{2}\, dx =$$

El primer y último términos son directamente antiderivables. Trabajemos en el segundo:

Sabemos que:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Luego:

$$\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$$

Si sustituimos:

$$= \int \frac{1}{4} + \frac{1+\cos(4x)}{8} - \frac{\cos(2x)}{2}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{4}\, dx + \int \frac{1+\cos(4x)}{8}\, dx - \int \frac{\cos(2x)}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \int \frac{1+\cos(4x)}{8}\, dx - \frac{\sin(2x)^*}{4}$$

*Nota *:* $\int \frac{1}{2} cos(2x)\, dx = \frac{1}{4} sin(2x)$. *Esto, naturalmente, hay que hacerlo mediante u sustitución:*

$$\int \frac{\cos(2x)}{2} dx$$
$$u = 2x \qquad du = 2\, dx$$

Para sustituir tendremos que 'tunear' el integrando original (busco tener un '2 dx'):

$$\frac{1}{4}\int \frac{\cos(2x)}{2} 4\, dx$$
$$\frac{1}{4}\int \cos(2x)\, 2\, dx$$

Ahora sustituimos:

$$\frac{1}{4}\int \cos(u)\, du = \frac{1}{4}\sin u = \frac{\sin(2x)}{4}$$

Seguimos:

$$= \frac{1}{4}x + \int \frac{1}{8} dx + \int \frac{\cos(4x)}{8} dx - \frac{\sin(2x)}{4}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{\sin(4x)}{32^{*}} - \frac{\sin(2x)}{4} + C}$$

Nota: por el mismo procedimiento de la nota anterior.*

CASO GENERAL DE FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA CON EXPONENTE.

Supongamos el caso:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{32} x\, dx = \frac{300540195}{4294967296}\pi = \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31}{2^{32}}$$

¿Es esta factorización una bonita casualidad? Seguro que no, estudiémoslo (de hecho, sobre el estudio de este tipo de relaciones va, precisamente, el cálculo). Para ello estudiemos la relación entre las dos siguientes expresiones:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x\, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx$$

Veamos el primer caso:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x\, dx$$

Usemos la integración por partes. Pensemos en uno de los ejemplos anteriores, el del seno elevado a exponente impar, en que transformábamos sin ^3 en sin^1 · sin ^2

$$\boldsymbol{u} = \sin^{n-1} x \qquad du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx$$

$$w = -\cos x \qquad \boldsymbol{dw = \sin^{n} x\, dx}$$

Ahora apliquemos la fórmula de la integración por partes:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x\, dx = \sin^{n-1} x \cdot -\cos x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \cdot (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx$$

$$= [-\sin^{n-1} x \cdot \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^{2} x\, dx$$

$$= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x\,(1-\sin^{2} x)\, dx$$

Expandamos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x\, dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x\, dx$$

Ahora sigamos expandiendo (el segundo término de la derecha):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - \left[(n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\,n} x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\,n} x\,dx\right]$$

$$n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx$$

Ahora dividamos de nuevo por 'n' en ambos lados:

$$n/n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = (n-1)/n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx$$

Por lo que, definitivamente, tendremos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{(n-1)}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx$$

Así, mediante esta fórmula tenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx \to n = 2 \to \frac{(2-1)}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx \to n = 4 \to \frac{(4-1)}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx \to n = 6 \to \frac{(6-1)}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\,dx \to n = 8 \to \frac{(8-1)}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

…

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{32} x\,dx \to n = 32 \to \frac{(32-1)}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx = \frac{31}{32}\cdot\frac{29}{30}\cdot\frac{27}{28}\ldots\ldots\ldots\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Simplificando, obtenemos:

$$\frac{31\cdot 29\cdot 9\cdot 5\cdot 23\cdot 19\cdot 17}{2^{32}}\pi$$

Que es lo que buscábamos…

INTEGRACIÓN DE UN COCIENTE.

Aprovechemos una pequeña demostración para ver la integración de un cociente.

$$\pi < \frac{22}{7}$$

Ok. Supongamos la siguiente integral:

$$\int_0^1 \frac{x^4 \cdot (1-x)^4}{1+x^2}\,dx$$

¿Cómo integramos esto?

Lo primero que vamos a hacer analizar la fracción. En el caso de la evaluación que proponemos *[0,1]*, el denominador es positivo, y el numerador también, luego el valor de la función es positiva y continua en el intervalo que estudiamos (este dato, el que tenga un valor positivo, lo usaremos después).

Ahora expandamos los factores:

$$(1-x)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

Luego:

$$x^4 \cdot (1-x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4$$

Ahora hagamos una laaarga división:

$$x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4 \qquad / \qquad 1 + x^2$$

$\boldsymbol{x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4}$	$\boldsymbol{1 + x^2}$
	Cociente parcial propuesto: x^6
A restar: $x^8 + x^6$	
Resto parcial: $-4x^7 + 5x^6 - 4x^5 + x^4$	
	Cociente parcial nuevo propuesto: $-4x^5$
A restar: $-4x^7 - 4x^5$	
Resto parcial: $5x^6 + x^4$	
	Cociente parcial nuevo propuesto: $5x^4$
A restar: $5x^6 + 5x^4$	
Resto parcial: $-4x^4$	
	Cociente parcial nuevo propuesto: $-4x^2$
A restar: $-4x^4 - 4x^2$	
Resto parcial: $4x^2$	
	Cociente parcial nuevo propuesto: 4
A restar: $4x^2 + 4$	
Resto final: -4	**Cociente definitivo: $x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4$**

Por la simple prueba de la división, podemos reescribir la integral (cociente – resto /divisor):

$$\int_0^1 x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}\, dx$$

Esta nueva forma es fácilmente integrable:

$$= \frac{x^7}{7} - \frac{4x^6}{6} + \frac{5x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x - 4\arctan x \Big|_0^1$$

$$= \frac{1^7}{7} - \frac{4 \cdot 1^6}{6} + \frac{5 \cdot 1^5}{5} - \frac{4 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{22}{7} - \pi$$

Retornemos ahora al dato según el cual la función del integrando era positiva, es decir: >0 Es decir, que podemos decir que:

$$0 > \frac{22}{7} - \pi$$

O lo que es lo mismo:

$$\pi < \frac{22}{7}$$

Q.E.D. (Quod erat demonstrandum)

Como conclusión de este epígrafe, realmente comprobamos que no hemos resuelto la integral de un cociente, pues, antes, hemos eliminado el cociente mediante la resolución de la división. En este sentido, toda estrategia pasa por tratar de eliminar el cociente o, en todo caso, 'acercarlo' a un cociente que podamos resolver fácilmente.

Hay algunas técnicas verdaderamente específicas para el cociente y que en algún momento recogeremos aquí. De momento seguimos con el curso.

LA INTEGRACIÓN DE UN COCIENTE CON GRADO NUMERADOR ≥ DENOMINADOR.

Realmente lo que se hace en estos casos es buscar una forma en la que le numerador acabe teniendo un grado menor que el denominador. Para ello, naturalmente, lo que tenemos que hacer es dividir. Al dividir, finalmente nos encontraremos con una forma abordable desde otra estrategia, es decir (esto no es más que la prueba de la división):

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\right)dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Es decir, finalmente, se reduce a calcular la integral de un polinomio normal, corriente y sin dificultad alguna:

$$\int C(x)\,dx$$

Más la integral de un cociente, ahora sí, de un cociente en el que **EL GRADO DEL NUMERADOR ≤ DENOMINADOR.**

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Ahora estaremos ante varios escenarios. Vamos a estudiarlos:

1) Tiene raíces reales y todas son distintas. Veamos un ejemplo:

$$\int \frac{7x+8}{x^2+3x+2}dx$$

Extraigamos las raíces reales que tiene el polinomio del denominador:

$$x = -1 \qquad x = -2$$

Luego:

$$\frac{7x+8}{x^2+3x+2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)}$$

Ojo, porque la 'x' de mayor exponente es "mónico", es decir, uno, no está multiplicada por ningún coeficiente. Si no fuera así, tendríamos que haber extraído, previamente, un factor para dejarla con coeficiente =1.

Seguimos resolviendo:

$$\frac{7x+8}{x^2+3x+2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

Ahora, paso importante, SE IGUALAN NUMERADORES PORQUE LOS DENOMINADORES (EVIDENTE) SON IGUALES:

$$7x+8 = A(x+2)+B(x+1)$$

Ahora determinaremos A y B. ¿Cómo?

Un modo es simple es:

Desarrollar los paréntesis y, después, igualar el coeficiente de la x de un lado con el del otro lado e igualar el término independiente con el término independiente (libre de x) del otro lado, ¿cómo?

$$7x + 8 = A(x + 2) + B(x + 1)$$

$$7x + 8 = Ax + Bx + 2A + B$$

Donde:

$$7x = Ax + Bx \rightarrow 7x = x(A + B) \rightarrow 7 = A + B$$

$$8 = 2A + B$$

Que podemos resolver fácilmente. Por ejemplo:

$$B = 8 - 2A$$

$$7 = A + 8 - 2A$$

$$-1 = -A \rightarrow A = 1$$

Y B, naturalmente, es:

$$B = 6$$

Otro modo más simple hubiera sido dar valores a la 'x' para que se anulara aluna factorización… por ejemplo:

Supongamos x = - 2 (estamos buscando cargarnos la A):

$$7x + 8 = A(x + 2) + B(x + 1)$$

$$7(-2) + 8 = A(-2 + 2) + B(-2 + 1)$$

$$7(-2) + 8 = A(0) + B(-2 + 1)$$

$$-14 + 8 = -2B + B$$

$$-14 + 8 = -2B + B$$

$$-6 = -B \rightarrow B = 6$$

Y, ahora vamos a por la A (nos cargamos la B), es decir, suponemos x=-1:

$$7x + 8 = A(x + 2) + B(x + 1)$$

$$7(-1) + 8 = A((-1) + 2) + B((-1) + 1)$$

$$1 = A$$

Seguimos con el proceso de preparación del integrando. Sustituimos en el lugar en que nos quedamos:

$$\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+2)}=\frac{1}{(x+1)}+\frac{6}{(x+2)}$$

Es decir, la integral la tenemos ahora en la forma, mucho más accesible:

$$\int\frac{1}{(x+1)}dx+\int\frac{6}{(x+2)}dx$$

Esto está chupadísmo (se hace directa por 'ln', pero lo vamos a desarrollar, por ejemplo):

$$\int\frac{6}{(x+2)}dx=¿?$$

$$u=x+2 \qquad\qquad du=dx$$

$$6\int\frac{1}{(x+2)}dx=6\ln u+C\rightarrow 6\ln|x+2|+C$$

Lo mismo haríamos con el otro término, por lo que la integral definitivamente sería:

$$\int\frac{7x+8}{x^2+3x+2}dx=1\cdot\ln|x+1|+6\cdot\ln|x+2|+C\rightarrow \mathbf{ln}|\boldsymbol{x}+\mathbf{1}|+\mathbf{6\,ln}|\boldsymbol{x}+\mathbf{2}|+\boldsymbol{C}$$

Otro por ejemplo del mismo tipo:

$$\int\frac{dx}{x^2-16}$$

Se descompone según las raíces del polinomio:

$$\frac{1}{x^2-16}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-4}$$

Luego:

$$\frac{1}{x^2-16}=\frac{A(x-4)+B(x+4)}{(x+4)(x-4)}$$

Es decir:

$$1=A(x-4)+B(x+4)$$

Supongamos x=+4:

$$1=8B\rightarrow B=\frac{1}{8}$$

Supongamos ahora x=-4:

$$1=A(-4-4)\rightarrow A=-\frac{1}{8}$$

Ahora sustituimos:

$$\frac{1}{x^2-16}=\frac{-\frac{1}{8}}{x+4}+\frac{\frac{1}{8}}{x-4}$$

Luego podemos reescribir:

$$\int\frac{dx}{x^2-16}=\int-\frac{1}{8(x+4)}dx+\frac{1}{8(x-4)}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\int\frac{1}{(x-4)}dx-\int\frac{1}{(x+4)}dx\right)=$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{8}\ln|x-4|-\frac{1}{8}\ln|x+4|+C}$$

2) Tiene raíces reales pero puede haber algunas repetidas. Veamos un ejemplo:

Supongamos:

$$\int \frac{8x^2+3x-9}{x^3+3x^2}dx$$

Trabajemos sobre el integrando:

$$\frac{8x^2+3x-9}{x^2(x+3)}=$$

Ahora, al presentar la factorización, debemos tener en cuenta en considerar TODAS las raíces, es decir, 'desplegar' todos los exponentes que hay. Lo vemos mejor con el ejemplo:

$$=\frac{8x^2+3x-9}{x^2(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x+3)}=$$

Nótese que algo al cuadrado (en este caso x^2) tenemos que 'desplegar', todos los exponente que se pueden dar, en este caso, x y x^2. Así, ahora, vamos a pasar el denominador de la izda a la derecha:

$$=8x^2+3x-9=\frac{A}{x}x^2(x+3)+\frac{B}{x^2}x^2(x+3)+\frac{C}{(x+3)}x^2(x+3)$$

Seguimos desarrollando:

$$=8x^2+3x-9=Ax(x+3)+B(x+3)+Cx^2$$

Procedamos ahora a 'cargarnos' los diferentes coeficientes para despejar los restantes. Por ejemplo, vamos a 'cargarnos' la A suponiendo x=-3.

$$=8(-3)^2+3(-3)-9=Ax(-3+3)+B(-3+3)+C(-3)^2$$

$$=8\cdot 9-9-9=9C\rightarrow C=6$$

Vamos a cargarnos ahora la C. Supongamos x= 0.

$$=8(0)+3(0)-9=A\cdot 0(-3+3)+B(-3+3)+C(0)^2$$

$$=-9=3B\rightarrow B=-3$$

Ahora vamos a ver si conseguimos encontrar A. Supongamos, por ejemplo, x=1:

$$=8(1)^2+3(1)-9=A\cdot 1(1+3)+B(1+3)+C(1)^2$$

Sustituimos los valores de B y C, y podremos despejar A:

$$=8(1)^2+3(1)-9=A\cdot 1(1+3)+(-3)(1+3)+(6)(1)^2=$$

$$=8+3-9=4A-12+6\rightarrow A=2$$

Ahora podremos sustituir:

$$= \frac{8x^2 + 3x - 9}{x^2(x+3)} = \frac{2}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{6}{(x+3)}$$

Ya tenemos el integrando preparado, ahora va a ser muy fácil:

$$\int \frac{8x^2 + 3x - 9}{x^3 + 3x^2} dx = \int \frac{2}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{6}{(x+3)} dx$$

Que es lo mismo que:

$$\int \frac{2}{x} dx - \int \frac{3}{x^2} dx + \int \frac{6}{(x+3)} dx$$

Es decir:

$$= 2\ln|x| - 3x^{-1} \cdot \left(\frac{1}{-1}\right) + 6\ln|x+3| + C =$$

$$= \mathbf{2\ln|x| + \frac{3}{x} + 6\ln|x+3| + C}$$

Veamos otro ejemplo de este mismo tipo:

$$\int \frac{3x + 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$$

Busquemos las raíces:

$$\frac{3x + 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{3x + 8}{x(x^2 - 4x)} = \frac{3x + 8}{x(x-2)^2}$$

Proseguimos (recordemos 'desplegar' todos los exponentes):

$$\frac{3x + 8}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

Procedamos a simplificar la expresión hacia la que vamos:

$$3x + 8 = \frac{A}{x}x(x-2)^2 + \frac{B}{(x-2)}x(x-2)^2 + \frac{C}{(x-2)^2}x(x-2)^2 =$$

$$\rightarrow 3x + 8 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

Vamos a cargarnos la C (y de camino la B…). Supongamos x = 0:

$$3 \cdot 0 + 8 = A(0-2)^2 + B \cdot 0(0-2) + C \cdot 0$$

$$8 = 4A \rightarrow A = 2$$

Ahora vamos a cargarnos la A (también nos cargamos de rebote la B). Supongamos x = 2.

$$3(2) + 8 = A(2-2)^2 + B2(2-2) + C2$$

$$14 = 2C \rightarrow C = 7$$

Ahora, supongamos un valor cualquiera válido para B (como ya tenemos los valores de A y C, sustituiremos). Supongmos x=1:

$$3(1) + 8 = 2(1-2)^2 + B1(1-2) + 7 \cdot 1$$

$$11 = 2 - B + 7 \rightarrow B = -2$$

Ahora presentamos el integrando modificado:

$$\int \frac{3x+8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx = \int \frac{2}{x} + \frac{-2}{(x-2)} + \frac{7}{(x-2)^2} dx =$$

$$= \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{2}{(x-2)} dx + \int \frac{7}{(x-2)^2} dx =$$

$$= 2\ln|x| - 2\ln|x-2| + 7\int \frac{dx}{(x-2)^2}$$

Procedamos con el último integrando:

$$u = x - 2 \qquad du = dx$$

$$= 7\int \frac{du}{u^2} \rightarrow 7\int u^{-2} du \rightarrow 7\frac{u^{-1}}{-1} \rightarrow -7\frac{1}{u} + C$$

Luego, definitivamente:

$$= \mathbf{2\ln|x| - 2\ln|x-2| - \frac{7}{x-2} + C}$$

Aglutinamos algunos ejercicios. Estos son ejercicios de selectividad que cayeron en os exámenes de entre los 2000 y 2010.

1.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x^3+x^2-6x}}\boldsymbol{dx}$$

Replanteemos el integrando:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}=\frac{x+1}{x(x^2+x-6x)}$$

Veamos las raíces del polinomio cuadrático:

$$x^2+x-6x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\begin{cases}x=2\\x=-3\end{cases}$$

También podríamos haber sacado las raíces por Ruffini…

Entonces, una vez con las raíces, podremos decir que (¡recuérdese el cambio de signo de la raíz!):

$$\frac{x+1}{x(x^2+x-6x)}\rightarrow\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+3)}$$

Pasamos el denominador de la izda a la dcha:

$$x+1=\frac{A}{x}x(x-2)(x+3)+\frac{B}{(x-2)}x(x-2)(x+3)+\frac{C}{(x+3)}x(x-2)(x+3)$$

$$x+1=A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$$

Empecemos a despejar. Vamos a cargarnos la C. Supongamos x = 0 (la 'B' cae también):

$$x+1=A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$$

$$0+1=A(0-2)(0+3)+B0(0+3)+C0(0-2)$$

$$1=A(-2)(+3)$$

$$1=-6A\rightarrow A=-\frac{1}{6}$$

Ahora vamos a cargarnos la A. Supongamos x = -3:

$$x+1=A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$$

$$(-3)+1=A((-3)-2)((-3)+3)+B(-3)((-3)+3)+C(-3)((-3)-2)$$

$$-2=C15\rightarrow C=\frac{-2}{15}$$

Ahora, busquemos la B Supongamos x = 1 (casi siempre esta suposición es la más fácil):

$$x+1=A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$$

$$1+1=(-\frac{1}{6})(1-2)(1+3)+B1(1+3)+(\frac{-2}{15})1(1-2)$$

$$1+1=(-\frac{1}{6})(-1)(4)+B1(4)+(\frac{-2}{15})1(-1)$$

$$2=(-\frac{1}{6})(-4)+4B+(\frac{2}{15})$$

$$2=\left(\frac{4}{6}\right)+4B+\left(\frac{2}{15}\right)\rightarrow 2-\frac{4}{6}-\frac{2}{15}=4B$$

$$\frac{6}{5}=4B\rightarrow B=\frac{3}{10}$$

Ahora podremos resolver muy fácilmente:

$$\int\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx=\int\frac{-\frac{1}{6}}{x}+\frac{\frac{3}{10}}{(x-2)}+\frac{\frac{-2}{15}}{(x+3)}dx$$

Que es:

$$=-\mathbf{\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{3}{10}\ln|x-2|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+C}$$

2.-

$$\int\mathbf{\frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx}$$

Vemos que el numerador es mayor que el denominador. Procedemos a realizar la división:

$\mathbf{x^4-3x^3-3x-2}$	$\mathbf{x^3-x^2-2x}$
	Cociente parcial propuesto: x
A restar:$\mathbf{x^4-x^3-2x^2}$	
Resto parcial:$\mathbf{-2x^3+2x^2-3x-2}$	
	Cociente parcial nuevo propuesto: -2
A restar: :$-2\mathbf{x^3+2x^2+4x}$	
Resto parcial:$\mathbf{-7x-2}$	
Resto final: :$\mathbf{-7x-2}$	**Cociente definitivo:** $\mathbf{x-2}$

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int x-2\,dx + \int \frac{-7x-2}{x^3-x^2-2x}dx$$

La primera parte la dejamos ya hecha:

$$\int x-2\,dx = \frac{x^2}{2}-2x+C$$

Vamos a por la segunda que, siempre, es la jodida (ojo no olvidemos el signo menos que antecede a todo!):

$$\int \frac{-7x-2}{x^3-x^2-2x}dx = -\int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx =$$

$$\int \frac{7x+2}{x(x^2-x-2)}$$

Busquemos las raíces del polinomio cuadrático que tenemos en el denominador:

$$x^2-x-2 = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Luego podemos seguir redefiniendo el integrando como:

$$\frac{7x+2}{x(x^2-x-2)} = \frac{7x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+1)}$$

Sigamos despejando, pasemos el denominador de la izda a la dcha:

$$7x+2 = \frac{A}{x}x(x-2)(x+1)+\frac{B}{(x-2)}x(x-2)(x+1)+\frac{C}{(x+1)}x(x-2)(x+1)$$

$$7x+2 = A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$$

Vamos a cargarnos el C y el B. Propongamos x = 0:

$$7x+2 = A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$$

$$7\cdot 0+2 = A(0-2)(0+1)+B0(0+1)+C0(0-2)$$

$$A=-1$$

Ahora vamos a cargarnos la A. Proponemos x = -1 (también cae la B):

$$7x+2 = A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$$

$$7(-1)+2 = A((-1)-2)((-1)+1)+B(-1)((-1)+1)+C(-1)((-1)-2)$$

$$-5 = 3C \rightarrow C = -\frac{5}{3}$$

Despejemos B. Para ello propongamos una x = 1.

$$7(1)+2=(-1)\big((1)-2\big)\big((1)+1\big)+B(1)\big((1)+1\big)-\frac{5}{3}(1)\big((1)-2\big)$$

$$9=2+2B+\frac{5}{3}\rightarrow 2B=7-\frac{5}{3}\rightarrow B=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$$

Ahora podemos seguir adelante con nuestra integral (ojo, la segunda parte)... y recordemos el signo negativo que precede:

$$-\int\frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx=\int-\frac{-1}{x}-\frac{\frac{8}{3}}{(x-2)}-\frac{-\frac{5}{3}}{(x+1)}dx\rightarrow$$

$$\int\frac{1}{x}-\frac{\frac{8}{3}}{(x-2)}+\frac{\frac{5}{3}}{(x+1)}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{\frac{8}{3}}{(x-2)}dx+\int\frac{\frac{5}{3}}{(x+1)}dx=$$

$$=\ln|x|-\frac{8}{3}\ln|x-2|+\frac{5}{3}\ln|x+1|$$

Y no olvidemos la primera parte de la integral, es decir, el resultado final es:

$$\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|-\frac{8}{3}\ln|x-2|+\frac{5}{3}\ln|x+1|+C$$

3) Tiene raíces imaginarias simples.

Cuando nos encontramos con una expresión con raíces complejas, el modo de resolución y de 'adaptación del integrando' es diferente. En una parte tendríamos las raíces reales y en otro las raíces complejas, a qué nos referimos? La diferencia está en que antes proponíamos una constante sobre cada una de las raíces posibles. Ahora, sobre la parte indecidible mediante números reales, es decir, las raíces complejas, no propondremos una constante sino un polinomio de grado uno: **Ax+B**.

Veamos un ejemplo para entender a qué nos estamos refiriendo:

$$\int \frac{\boldsymbol{3x^3+6x^2+4x-24}}{\boldsymbol{x^4+4x^3+8x^2}}\boldsymbol{dx} = ¿\,?$$

De entrada, fácilmente, observamos que no podemos dividir el polinomio para simplificarlo (el numerador es de grado menor que el denominador) y que el numerador no es la derivada del denominador (que nos posibilitaría una solución de tipo logarítmico). Tendremos que 'preparar' el interior del integrando. Para ello extraigamos sus raíces:

$$\frac{3x^3+6x^2+4x-24}{x^4+4x^3+8x^2}=\frac{3x^3+6x^2+4x-24}{x^2(x^2+4x+8)}$$

Vemos fácilmente que el polinomio cuadrático x^2+4x+8 no tiene soluciones reales, es decir es irreducible por lo que vamos a tener que apañárnosla con él. ¿Cómo? Usando la expresión Ax+B (en nuestro caso Cx+D, pues A y B las vamos a pillar antes). Ahora veremos como:

$$\frac{3x^3+6x^2+4x-24}{x^2(x^2+4x+8)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4x+8}$$

Como hemos hecho en casos anteriores, vamos a simplificar esta expresión pasando el denominador de la izda a la dcha:

$$3x^3+6x^2+4x-24=\frac{A}{x}x^2(x^2+4x+8)+\frac{B}{x^2}x^2(x^2+4x+8)+\frac{Cx+D}{x^2+4x+8}x^2(x^2+4x+8)$$

$$3x^3+6x^2+4x-24=Ax(x^2+4x+8)+B(x^2+4x+8)+(Cx+D)x^2$$

Tenemos una ecuación con cuatro incógnitas. Esto se puede despejar de varias maneras, mediante la igualación de coeficientes, o dando valores a 'x'. Voy a proceder de este último modo. Es lento y tedioso, pero simple. Lo único que hay que hacer es no tener prisas y ser cuidadoso con los pasos. Es fácil liarse… Vamos a tener que preparar 4 ecuaciones diferentes, es decir, dar 4 valores diferentes de 'x' para obtener 4 expresiones que nos permitan despejar todas las incógnitas.

x = 0

$$3x^3+6x^2+4x-24=Ax(x^2+4x+8)+B(x^2+4x+8)+(Cx+D)x^2$$

$$3\cdot 0^3+6\cdot 0^2+4\cdot 0-24=A\cdot 0(0^2+4\cdot 0+8)+B(0^2+4\cdot 0+8)+(C\cdot 0+D)0^2$$

$$-24=8B\rightarrow \boldsymbol{B=-3}$$

x = 1

$$3x^3 + 6x^2 + 4x - 24 = Ax(x^2 + 4x + 8) + B(x^2 + 4x + 8) + (Cx + D)x^2$$

$$3 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 24 = A \cdot 1(1^2 + 4 \cdot 1 + 8) + (-3)(1^2 + 4 \cdot 1 + 8) + (C \cdot 1 + D)1^2$$

$$3 + 6 + 4 - 24 = A \cdot 1(13) + (-3)(13) + C + D$$

$$\boldsymbol{28 = 13A + C + D}$$

x = -1

$$3x^3 + 6x^2 + 4x - 24 = Ax(x^2 + 4x + 8) + B(x^2 + 4x + 8) + (Cx + D)x^2$$

$$3 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 24 = A \cdot (-1)(-1^2 + 4 \cdot (-1) + 8) + B(-1^2 + 4 \cdot (-1) + 8) + (C \cdot (-1) + D) \cdot (-1)^2$$

$$-3 + 6 - 4 - 24 = A \cdot (-1)(5) + (-3)(5) - C + D$$

$$\boldsymbol{-10 = -5A - C + D}$$

x = 2

$$3x^3 + 6x^2 + 4x - 24 = Ax(x^2 + 4x + 8) + B(x^2 + 4x + 8) + Cx^3 + Dx^2$$

$$3 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 24 = A \cdot 2(2^2 + 4 \cdot 2 + 8) + (-3)(2^2 + 4 \cdot 2 + 8) + C \cdot 2^3 + D \cdot 2^2$$

$$24 + 24 + 8 - 24 = A \cdot 2(20) + (-3)(20) + 8C + 4D$$

$$32 = 40A - 60 + 8C + 4D$$

$$\boldsymbol{92 = 40A + 8C + 4D}$$

Tenemos, entonces, un sistema de 4 ecuaciones con incógnitas. Procedamos a resolverlo:

$$(\mathbf{1}). \qquad \boldsymbol{B = -3}$$

$$(\mathbf{2}). \qquad \boldsymbol{28 = 13A + C + D}$$

$$(\mathbf{3}). \quad \boldsymbol{-10 = -5A - C + D}$$

$$(\mathbf{4}). \quad \boldsymbol{92 = 40A + 8C + 4D}$$

Vamos a intentar despejar A llegando a una expresión en que todo esté en función de A. Para ello:

$$(2). \qquad 28 - 13A - C = D$$

Ahora vamos a sustituir en (3) para dejar 'C' en función de 'A':

$$(3). \quad -10 = -5A - C + 28 - 13A - C$$

$$\frac{-38 + 18A}{-2} = C \rightarrow C = \frac{38 - 18A}{2}$$

Luego, sustituyendo en (4):

$$(\mathbf{4}). \quad \boldsymbol{92 = 40A + 8C + 4D}$$

$$92 = 40A + 8\left(\frac{38 - 18A}{2}\right) + 4\left(28 - 13A - \left(\frac{38 - 18A}{2}\right)\right)$$

$$92 = 40A + 4 \cdot 38 - 4 \cdot 18A + 4 \cdot 28 - 4 \cdot 13A - 2 \cdot 38 + 2 \cdot 18A$$

$$92 = 40A + 152 - 72A + 112 - 52A - 76 + 36A$$

$$-96 = -48A$$

$$\boldsymbol{A = 2}$$

Ya tenemos B = -3 y A = 2. Ya nos queda menos:

$$C = \frac{38 - 18A}{2} = \frac{38 - 18 \cdot 2}{2} = 1 \rightarrow \boldsymbol{C = 1}$$

Y D:

$$28 - 13 \cdot 2 - 1 = D \rightarrow \boldsymbol{D = 1}$$

Ya lo tenemos todo. Podemos seguir adelante con la integración.

$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 + 4x - 24}{x^2(x^2 + 4x + 8)} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 8} dx \rightarrow$$

$$\int \frac{2}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{1x + 1}{x^2 + 4x + 8} dx = \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{3}{x^2} dx + \int \frac{1x + 1}{x^2 + 4x + 8} dx =$$

Las dos primeras ya las tenemos definitivas:

$$2\ln|x| + \frac{3}{x} + \int \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 8} dx$$

La que nos queda a la derecha es la que tiene sustancia. Podemos replantearla del siguiente modo:

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 8} dx = \int \frac{x}{x^2 + 4x + 8} dx + \int \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx$$

La de la derecha la vamos a dirigir hacia una solución logarítmica y la de la derecha hacían una solución de tipo arcotangente.

Vamos con la izquierda:

$$\int \frac{x}{x^2 + 4x + 8} dx$$

$$u = x^2 + 4x + 8 \qquad du = 2x + 4$$

Tenemos que 'tunear' el integrando:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x + 4 - 4}{x^2 + 4x + 8} dx$$

Que, a su vez, podemos presentar en dos bloques:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx - \frac{1}{2}\int \frac{4}{x^2+4x+8}dx$$

Lo de la izquierda ya podemos rescatarlo (lo anotamos para la solución final, como antes, en verde):

$$\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8|$$

Ahora recordemos la parte en rojo que dejamos pendiente a la que podemos sumar el residuo que, en la parte azul nos ha vuelto a quedar: tenemos, pues, esto:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{4}{x^2+4x+8}dx + \int \frac{1}{x^2+4x+8}dx \to \int \frac{-1}{x^2+4x+8}dx$$

Esta última parte la vamos a resolver por dirigiéndola, como ya hemos dicho, hacia una solución de arcotangente. Para ello tendremos que presentar el denominador como 'algo al cuadrado' más 1 y en el numerador 1.

Para ello completemos el cuadrado del denominador:

$$x^2+4x+8 \to (x+2)^2+4$$

Entonces:

$$-\int \frac{1}{x^2+4x+8}dx = -\int \frac{1}{(x+2)^2+4}dx$$

Pero necesitamos que abajo sea 'algo al cuadrado más 1', así que tuneamos:

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{((x+2)^2+4)\cdot\frac{1}{4}}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{(x+2)^2}{4}+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}dx$$

Ahora sí podemos usar la u sustitución para ir hacia la solución arcotangente:

$$u = \frac{x+2}{2} \qquad du = \frac{1}{2}dx$$

Tendremos que tunear un poco el integrando metiendo un ½ :

$$= -\frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}dx \to -\frac{1}{2}\int \frac{du}{(u)^2+1} = -\frac{1}{2}\arctan u + C$$

Es decir:

$$= -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + C$$

Ya tenemos todos los fragmentos integrados, ahora unámoslos (lo verde) y tendremos el resultado final de la integral:

$$\mathbf{2\ln|x| + \frac{3}{x} + \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + C}$$

Veamos otro ejemplo:

$$\int \frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{x^2+2x+3}}\,\mathbf{dx}$$

Éste parecería que no necesita realizar operaciones demasiado complejas… pero… putada, el denominador tiene raíces imaginarias.

Empecemos a trabajar sobre la expresión. El numerador ofrece una oportunidad para resolver el problema de manera logarítmica. Explorémosla:

$$\int \frac{3x}{x^2+2x+3}\,dx$$

$$u = x^2+2x+3 \qquad\qquad du = 2x+2$$

Así:

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{2}{x^2+2x+3}\,dx$$

La de la izquierda tiene solución simple (la ponemos en verde para rescatarla después):

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+3| + C$$

Vamos a por la de la derecha que tiene más chicha. La vamos a arrimar a una solución de arcotangente. Para ello completaremos el cuadrado del denominador:

$$-\frac{3}{2}\int \frac{2}{x^2+2x+3}\,dx = -3\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$$

$$= -3\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx$$

Preparemos el denominador:

$$= -3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{2}+1}\,dx = \frac{-3}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

Vamos a por ello ahora:

$$u = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad du = \frac{1}{\sqrt{2}}\,dx$$

$$= \frac{-3 \cdot \sqrt{2}}{2} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx \rightarrow$$

$$= \frac{-3 \cdot \sqrt{2}}{2} \int \frac{du}{(u)^2 + 1} \rightarrow$$

$$= \frac{-3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \arctan u + C$$

Es decir, el resultado final es:

$$\boldsymbol{\frac{3}{2} \ln\left|x^2 + 2x + 3\right| - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C}$$

Vamos a ver otro ejemplo:

$$\int \frac{5}{x^2 + 2x + 5} dx$$

En este caso se opta por 'completar el cuadrado' buscando una integral del tipo arcotangente.

Es decir, podemos reescribir la expresión como:

$$5 \int \frac{1}{(x+1)^2 + 4} dx \rightarrow 5 \cdot \frac{1}{4} \int \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot [(x+1)^2 + 4]} dx$$

Pero tenemos que acercarlo más a la forma que nos integra en arcotangente, así que:

$$\rightarrow \frac{5}{4} \int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{4}{4}} dx \rightarrow \frac{5}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} dx$$

Ahora sí tiene la forma de derivada de arcotangente, así que avanzamos con la u-sustitución:

$$u = \frac{x+1}{2} \qquad\qquad du = dx$$

Es decir:

$$\frac{5}{4} \int \frac{du}{(u)^2 + 1} \rightarrow \frac{5}{4} \arctan u + C \rightarrow \boldsymbol{\frac{5}{4} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C}$$

Veamos otro ejemplo:

$$\int \frac{x+2}{x^2-6x+10}dx$$

Es obvio que el polinomio del denominador no tiene soluciones reales.

Lo primero que vamos a hacer para seguir avanzando es descomponer en dos partes la integral:

$$\int \frac{x+2}{x^2-6x+10}dx = \int \frac{x}{x^2-6x+10}dx + \int \frac{2}{x^2-6x+10}dx \rightarrow$$

Ok, vamos a empezar a arrimar la primera de ellas a una solución logarítmica. Para ello:

$$u = x^2-6x+10 \qquad\qquad du = 2x-6$$

Argh… pero hay ahí un -6 que nos hace falta… No pasa nada, lo metemos y lo sacamos:

$$\rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2x-6+6}{x^2-6x+10}dx + \int \frac{2}{x^2-6x+10}dx \rightarrow$$

Volvemos a separar:

$$\rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx + \frac{1}{2}\int \frac{6}{x^2-6x+10}dx + \int \frac{2}{x^2-6x+10}dx \rightarrow$$

Pero estamos a punto de poder sumar las dos de la derecha, adaptémosla:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx + \frac{1}{2}\int \frac{6}{x^2-6x+10}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2\cdot 2}{x^2-6x+10}dx \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx + \frac{1}{2}\int \frac{6}{x^2-6x+10}dx + \frac{1}{2}\int \frac{4}{x^2-6x+10}dx \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx + \frac{1}{2}\int \frac{10}{x^2-6x+10}dx \rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx + \int \frac{5}{x^2-6x+10}dx$$

La de la izquierda, la azul, está chupada hacerla. Es una integración directa a logaritmo. La dejamos para el final. Estudiemos ahora la derecha. La vamos a acercar a una integral de tipo arcotangente.

$$\rightarrow 5\int \frac{1}{x^2-6x+10} \rightarrow 5\int \frac{1}{(x-3)^2+1}dx \rightarrow$$

$$u = x-3 \qquad\qquad du = dx$$

$$5\int \frac{1}{(u)^2+1}dx \rightarrow 5\arctan u + C$$

Es decir, el resultado final es:

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-6x+10| + 5\arctan|x-3| + C$$

4) Tiene raíces imaginarias pero puede haber algunas repetidas. De momento no lo estudiaremos.

Explicaciones definitivas

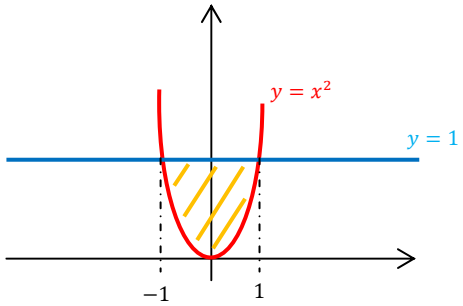
Integrales 5. Aplicaciones de la integración.

Las aplicaciones de la integración son tantas como la imaginación sea capaz de encontrar. Aquí vamos a centrarnos en el cálculo de áreas y volúmenes.

ÁREAS

Ya sabemos que mediante la integración podemos calcular áreas de funciones, áreas entre funciones, etc…

Supongamos la siguiente función:



Sabemos que el área será el resultado de integrar todos los valores para una altura determinada · una base determinada:

$$\int (altura \cdot base)$$

¿Cuánto es la altura de los diferentes rectángulos (infinitos) insertos en la zona cuyo área queremos medir (es decir, **medimos el área 'verticalmente'**?

$$altura = 1 - x^2$$

Pues, obviamente:
Cuando x = 1 ó -1, la altura es = 0
… Puntos intermedios …
Cuando x = 0, la altura es = 1

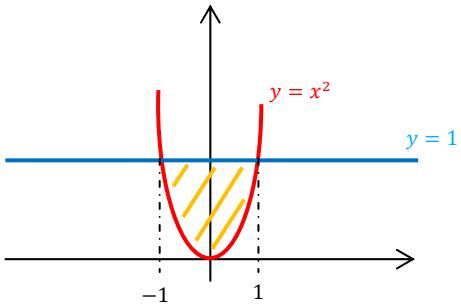
Y, la anchura de la base es, también obvio: *dx*. Luego el área está definida como:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = ÁREA$$

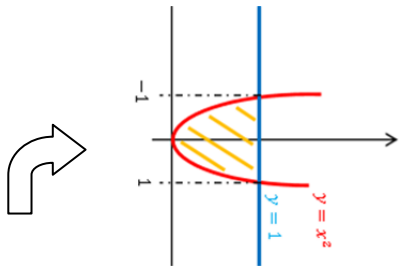
$$= x - \frac{x^3}{3}\ (evaluada\ entre -1\ y\ 1) =$$

$$= \left[1 - \frac{1^3}{3}\right] - \left[(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right] = 1 - \frac{1^3}{3} + 1 - \frac{1^3}{3} = \frac{4}{3}$$

Pero podríamos **medirlo "horizontalmente"**. Es decir, mediante la integración de su inversa. En definitiva, pueden haber cálculos de áreas que sean más fáciles de abordar desde una perspectiva horizontal que desde una perspectiva vertical. Naturalmente se haría realizando la integración sobre 'el mundo inverso'. Veámoslo con el ejemplo anterior:



Tendríamos que imaginar que giramos 90 grados el esquema, y ya tendríamos la imagen inversa.



Algebráicamente, las expresiones, nos quedarán así:

$$Despejamos\ x\ (ponemos\ x\ en\ función\ de\ 'y'): x = \sqrt{y}$$

En un 'escenario girado', ¿cuánto vale la altura?: $\sqrt{y}$. Eso por encima del eje simétrico. Por debajo, existe también, luego la altura será: $2\sqrt{y}$.

¿Y cuánto vale la base? Naturalmente, 'dy'.

¿Y el intervalo a medir? Pues fácilmente vemos que va desde 0 hasta 1. Así, el nuevo escenario, el horizontal, nos quedaría así:

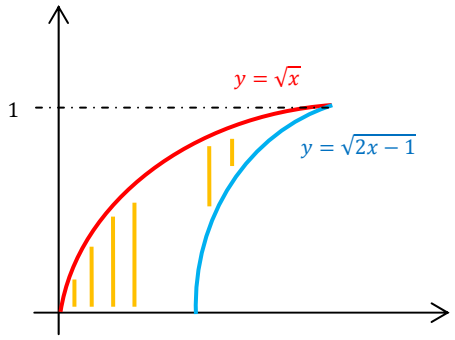
$$\int_0^1 2 \cdot \sqrt{y}\, dy = \int_0^1 2 \cdot y^{\frac{1}{2}}\, dy = \frac{2 \cdot y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2 \cdot y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\ (evaluada\ entre\ 0\ y\ 1)$$

Cuidado aquí… he estado haciendo esta cafrada: $\sqrt[3]{2y^2}$, cuando es:$2 \cdot \sqrt[3]{y^2}$, el producto no se puede meter a la ligera en un radical!!

$$= \frac{2 \cdot 1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2 \cdot 0^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

¿Cuándo es conveniente usar la 'medición horizontal'? Muy simple, cuando facilite las cosas, o cuando haga la respuesta más elegante.

Veamos este ejemplo:

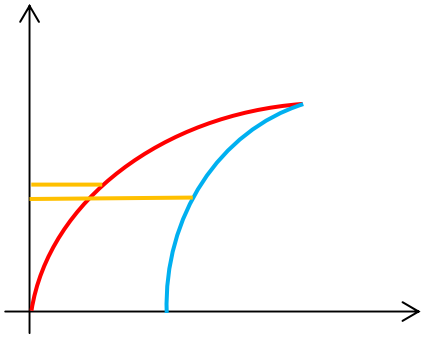


Vemos que mediante la 'medición vertical', en la zona de la izquierda, la función altura se definirá como una altura entre el eje de la 'x' y la función roja, mientras que, en la zona de la derecha, a partir de determinado momento, la altura se definirá como la distancia entre la función azul y roja. Es decir, tenemos que definir la altura de manera diferente para dos lugares de la zona.

En cambio, mediante la 'medición horizontal', la 'altura, será siempre definida mediante la diferencia entre las dos funciones implicadas lo cual, obviamente, facilita mucho las cosas. En este caso compensa notablemente hacer la 'medición horizontal'. Para ello, giremos y redefinamos la función inversa:

$$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$$

$$y = \sqrt{2x-1} \rightarrow x = \frac{y^2+1}{2}$$



La altura, ahora es la diferencia entre las dos funciones:

$$altura: \frac{y^2+1}{2} - y^2$$

Y la base: 'dy'. Luego el área:

$$\int_0^1 \frac{y^2+1}{2} - y^2 \, dx = Área$$

Resolvamos (es muy fácil):

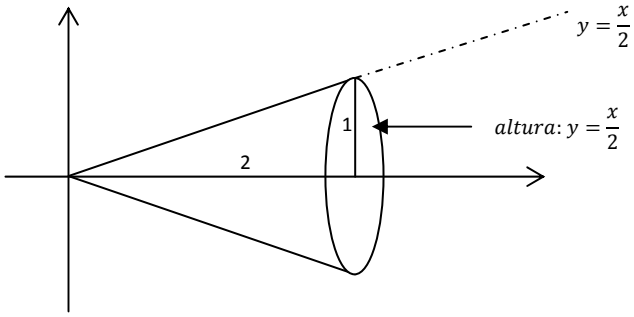
$$\int_0^1 \frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}-y^2\,dx = \frac{y^3}{6}+\frac{y}{2}-\frac{y^3}{3}\ (evaluado\ entre\ 0\ y\ 1) =$$

$$\left[\frac{1^3}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1^3}{3}\right]-\left[\frac{0^3}{6}+\frac{0}{2}-\frac{0^3}{3}\right] = \frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

VOLUMEN

Si el área es la suma de 'muchas líneas', es fácil ver que el volumen no será sino la suma de muchas 'capas de áreas'.

Vamos a verlo en el cálculo del volumen de un cono. Para ello, como ya hemos visto, y con el fin de simplificar las cosas, giremos el cono y ubiquemos su vértice en el eje de coordenadas:



Vamos a ir haciendo 'rodajas ultra finas' acercándonos hacia el cero y en ese 'desplazamiento' el radio se va a ir haciendo menor según la proporción $y = \frac{x}{2}$.
Calculemos el volumen de una 'rodaja' cualquiera en el centro del cono.

Sabemos que el radio de cualquier rodaja es:

$$r = \frac{x}{2}$$

El volumen de un cilindro es:

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ahora, adaptándolo a nuestro esquema, podremos decir que el volumen de una rodaja genérica del cilindro es:

$$V_{'rodaja'} = \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot dx$$

Ahora integramos, obviamente, desde 0 hasta 2, por lo que:

$$\int_0^2 \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx$$

Esto es simplísimo de integrar:

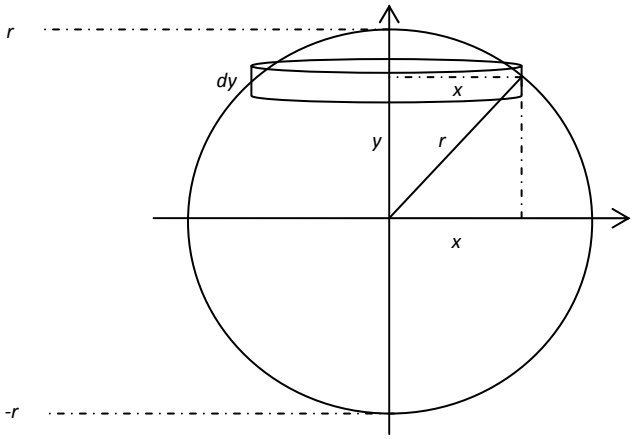
$$= \pi \int_0^2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^2 x^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{\pi x^3}{12} (evaluado\ entre\ 0\ y\ 2) = \frac{\pi 2^3}{12} - \frac{\pi 0^3}{12} = \frac{2\pi}{3}\ unidades\ cuadradas$$

Veamos el caso del volumen de una esfera.

Sabemos que la expresión que define una esfera de radio 'r' es:

$$x^2 + y^2 = r$$



Pero, ojo, esto no es una función (no cumple la cláusula de la línea vertical). Tenemos que definir bien la función que traza esta circunferencia y, para ello despejaremos x en función de 'r' y de 'y'. Por Pitágoras, despejemos el radio del cilindro pequeño, es decir, 'x':

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

Para calcular el volumen total de la esfera, tendremos que sumar el volumen acumulado de todos los mini cilindros que se pueden insertar en ella y del que hemos puesto una muestra arriba. ¿Cuál es el volumen de cada minicilindo?

$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Es decir, según nuestro esquema:

$$\pi \cdot x^2 \cdot dy$$

Podemos redefinir la expresión como:

$$\pi \cdot \left(\sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 \cdot dy = \pi \cdot (r^2 - y^2) \cdot dy$$

Ahora preparémonos para integrar, acumular la suma de los cilindro de altura 'dy':

$$\int_{-r}^{r} \pi(r^2 - y^2)dy =$$

Pi es una constante:

$$= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - y^2)dy$$

Ahora integremos los dos miembros de la resta:

$$= \pi \int_{-r}^{r} r^2 \, dy - \int_{-r}^{r} y^2 \, dy$$

$$= \pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right] \Bigg|_{-r}^{r} =$$

Como el volumen es simétrico respecto del eje de abscisas (eje de la x):

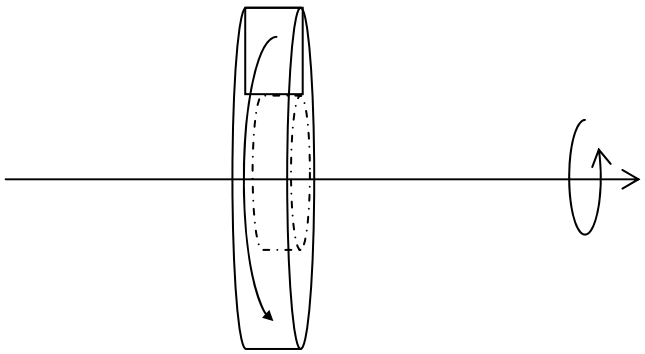
$$= 2\pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right] \Bigg|_{0}^{r} = 2\pi r^2 y|_0^r - 2\pi \frac{y^3}{3} \Bigg|_0^r =$$

$$= 2\pi r^2 r - 2\pi \frac{r^3}{3} = 2\pi (r^3 - \frac{r^3}{3}) =$$

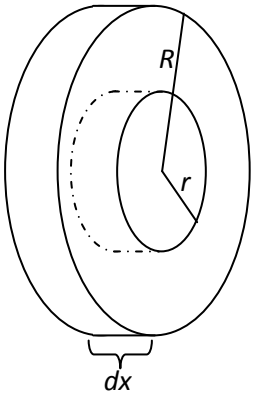
$$= 2\pi \frac{2r^3}{3} = \boldsymbol{\frac{4\pi r^3}{3}}$$

Cálculo de volúmenes con orientación VERTICAL, mediante: ARANDELAS (washers).

Imaginemos un rectángulo que rota, separado una determinada distancia, en torno al eje de abscisas:



Esta 'arandela' tendría esta estructura:

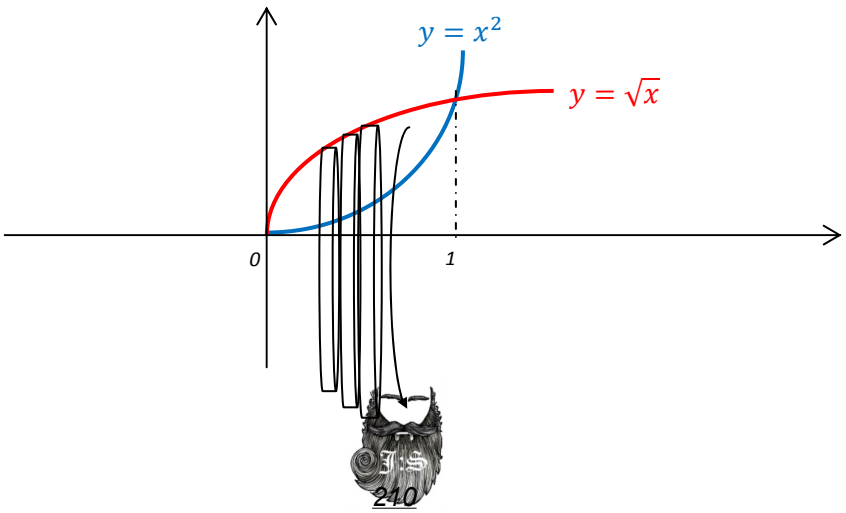


Es fácil ver que no es sino un cilindro al que se le resta otro cilindro de radio menor y misma altura, es decir, el volumen de la arandela será:

$$V_{arandela} = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi R^2 dx - \pi r^2 dx =$$

$$V_{arandela} = \pi\,(R^2 - r^2)\,dx$$

Ahora podremos usar esto para calcular volúmenes de revolución, por ejemplo, el volumen que genera al girar en torno al eje de abscisas el área comprendida entre dos funciones:



Naturalmente, tenemos un sumatorio de 'arandelas', en las que:

$$R = \sqrt{x}$$

$$r = x^2$$

Aplicando la fórmula que tenemos para el volumen de las arandelas a un proceso de integración:

$$\int_0^1 \pi\,(R^2 - r^2)\,dx = \int_0^1 \pi\,((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2)\,dx =$$

$$= \pi \int_0^1 x - x^4\,dx =$$

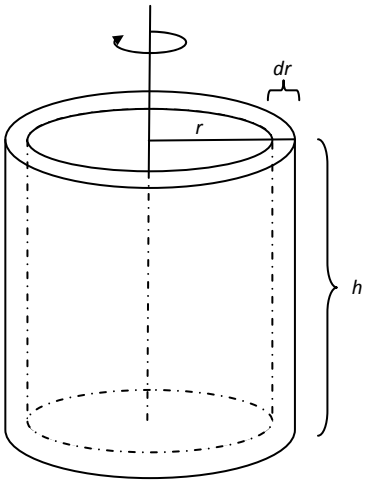
$$= \pi\frac{x^2}{2} - \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1$$

$$= \pi\frac{1^2}{2} - \pi\frac{1^5}{5} = \mathbf{\frac{3\pi}{10}}\ \boldsymbol{unidades\ cúbicas}$$

Nota: en muchos casos la diferencia entre radios la pondremos como valor absoluto pues lo que nos importa es el valor de esa distancia y es posible que no conozcamos bien qué radio es el mayor y cuál es el menor.

Cálculo de volúmenes con orientación VERTICAL, mediante: SHELLS (vainas, casquillos,…).

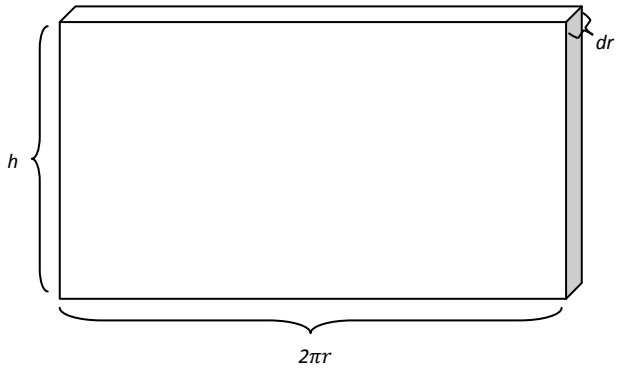
Por una shell, traduciremos como 'vaina', entendemos, gráficamente, esto:



Es lo mismo que hemos visto antes con la arandela con la salvedad de que cambiamos altura por anchura respectivamente… La diferencia entre los radios, ahora, es un diferencial, y la altura, que antes era un diferencial, ahora es una altura determinada.

Realmente, como hemos visto, mediante una técnica u otra (washers/shells) podemos dar solución al mismo problema. La diferencia está en que un enfoque será más simple que el otro. Por eso es útil seleccionar el método (vertical/horizontal) apropiado.

Volviendo al enfoque 'shells'. Si cortáramos la vaina por uno de sus lados (recuérdese que 'la tapa de abajo' también está abierta, es un cilindro hueco…) podríamos desplegarla y medir su volumen como un simple rectángulo de algún material determinado en el que:



El volumen de la vaina será:

$$V_{vaina} = 2\pi rh\ dr$$

También podemos deducir el volumen de la vaina restando el 'cilindro interno' al 'cilindro externo':

$$V_{vaina} = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R^2 - r^2)$$

Tenemos una diferencia de cuadrados, antes de poder decir que la diferencia entre los radios es = *dr*, tendremos que simplificar esta diferencia de cuadrados:

$$= \pi h(R + r)(R - r)$$

Sabemos que R y r son prácticamente iguales, así que podemos expresarlo así:

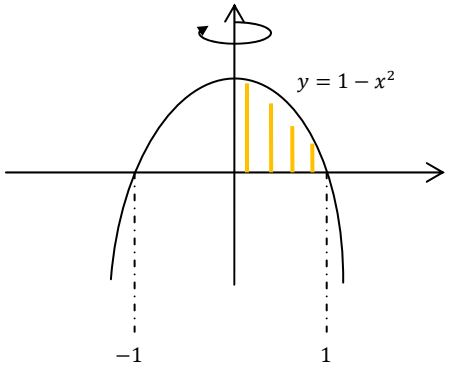
$$= \pi h(2r)(dr)$$

Por lo que el volumen de la vaina es, como ya sabemos:

$$\boldsymbol{V_{vaina} = 2\pi r h\, dr}$$

Veamos un ejemplo:

Queremos calcular el volumen, comprendido entre $y \leq 1 - x^2$ *e* $y \geq 0$, de la revolución de la siguiente función:



Lo que vamos a calcular es el volumen interno, no el volumen de la 'cáscara'… sino que encadenaremos cáscaras unas dentro de otras para obtener el volumen encerrado por la revolución de la función propuesta.

¿Cuál es la altura de cada una de las vainas?

$$h = 1 - x^2$$

¿Cuál es el radio de cada una de las vainas? x.

¿Y cuál es el grosor de cada vaina? dx.

El volumen acumulado de las vainas contenidas, entonces, será:

$$V = \int_0^1 2\pi x(1 - x^2)dx$$

¿Por qué desde [0,1]? Muy simple. En la propia fórmula del volumen de la vaina ya está implícita 'su parte del otro lado', es decir, lo que se cuenta está duplicado a ambos lados del eje de ordenadas, pues la fórmula de cada vaina es un cilindro completo, cerrado, por eso, sólo será necesario considerar los valores desde x=0 a x=1.

Para proseguir, ordenemos un poco el interior del integrando. Saquemos las constantes y desarrollemos el producto:

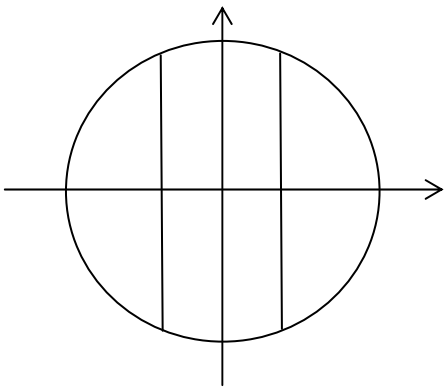
$$= 2\pi \int_0^1 x - x^3 dx$$

Obviamente, esto está chupao:

$$= 2\pi \frac{x^2}{2} - 2\pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

Veamos ahora otro ejemplo: el volumen de una esfera taladrada verticalmente.

El escenario es el siguiente. Esfera de radio 2 y taladro que mide también 2 (va desde -1 a +1):



Nos interesa la 'media luna' que queda a la derecha y su rotación hacia la izquierda. Usaremos, pues, vainas, es decir, calcularemos verticalmente.

¿Cuál es la altura de las vainas?

$$y = 2\sqrt{2^2 - x^2}$$

Nota: 2 porque hay que contar la parte de arriba y abajo del eje de la x.

¿Cuál es el radio? Naturalmente x.

¿Y el grosor? dx.

Vamos a medir en el intervalo [1,2], es decir, finalmente tenemos:

$$\int_1^2 2\pi x 2(\sqrt{2^2 - x^2})\, dx$$

Usemos la u sustitución:

$$u = 2^2 - x^2 \qquad du = -2x\, dx$$

Así:

$$-2\pi \int_{u=3}^{u=0} (\sqrt{u})\, du =* 2\pi \int_{u=0}^{u=3} (u)^{1/2}\, du = 2\pi \frac{(u)^{3/2}}{3/2}\Big|_{u=0}^{u=3}$$

Nota*= obsérvese que al cambiar el signo del integrando, invertimos el intervalo.

Que nos dará un resultado de:

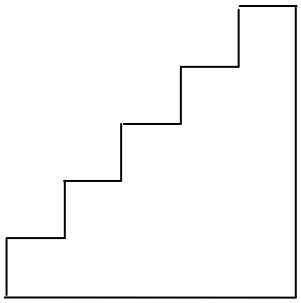
$$= \boldsymbol{4\pi\sqrt{3}\ unidades\ cúbicas}$$

LONGITUD

¿Qué es una longitud?

Hay conceptos que damos por sentados y cuya veracidad no nos paramos a pensar sobre ellos. Y cuando lo hacemos descubrimos que hay una serie de complicaciones conceptuales difíciles de solventar.

Por ejemplo, pensemos en el siguiente esquema:

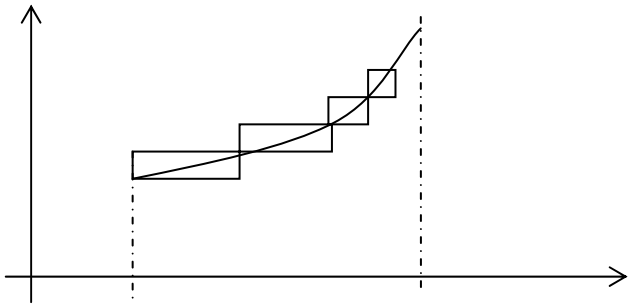


Si la base total mide 1, y la altura total mide 1, si sumamos todos los 'suelos' de los escalones y todas las 'paredes' de los escalones obtendremos 2.

Hagamos los escalones tan pequeños como queramos, infinitamente pequeños, la suma siempre nos dará 2. Sin embargo sabemos que la 'rampa' no mide 2, sino $\sqrt{2}$.

Para llegar a esta concepción no podemos seguir pensando en 'escalones' diferenciales, sino en 'rampas' diferenciales.

Por ejemplo, estudiemos una gráfica:



Lo que estudiamos son 'las rampitas', las hipotenusas infinitamente pequeñas. Es decir, toda 'rampita' (hipotenusa) será:

$$hyp = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Ahora acumulémoslas para conocer la longitud del segmento estudiado:

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Pero 'necesitamos sacar un dx', así que factoricemos, así llegamos a:

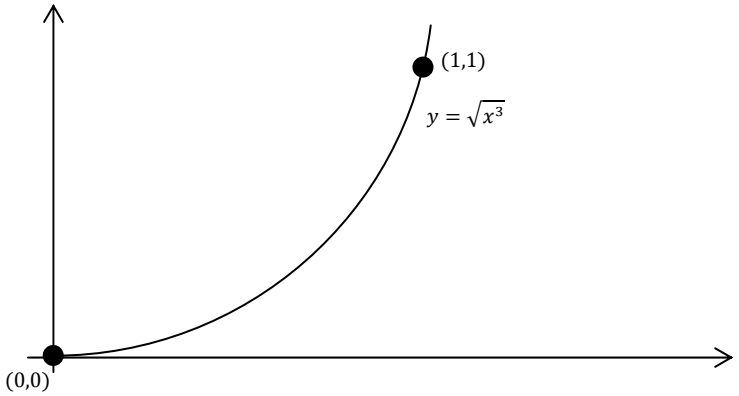
$$\int \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)dx}$$

Donde vemos, fácilmente que $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Es decir, en definitiva, tenemos que el arclength (arco-longitud) desde (a,f(a)) a (b,f(b)) es:

$$\boldsymbol{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

Apliquémoslo a un ejemplo:



Naturalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Aplicando la fórmula que dedujimos antes:

$$\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$

Hagamos una u sustitución:

$$u = 1+\frac{9}{4}x \qquad du = \frac{9}{4}dx \qquad dx = \frac{4}{9}du$$

Luego:

$$\int_{u=1}^{u=\frac{13}{4}} \frac{4\cdot u^{\frac{1}{2}}}{9} = \frac{4}{9}\frac{u^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^{13/4} = \boldsymbol{\frac{13\sqrt{13}}{27} - \frac{8}{27}}$$

Que es la longitud del segmento.

Explicaciones definitivas

Rudimentos básicos sobre el cálculo de límites.

Veamos un par de ejemplos básicos que nos ayuden a entender qué es el límite de una función en un punto.

CASO 1.

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2+3x-40}{x-5}$$

Obviamente esta función está indefinida en x=5, pues haría el denominador 0, creando una indeterminación.

En tal caso, trataremos de evitar dicha indeterminación buscando una función análoga. Ojo, es importante saber que la función que buscaremos NO ES LA MISMA FUNCIÓN, es análoga, pero no es la misma pues vamos a buscar una en la que el x=5 sí forme parte de su dominio, y ya hemos visto que en la original, no lo es. Sin embargo, esa función análoga nos permitirá salvar ese punto en concreto.

Para buscar esa función alternativa, factorizaremos intentando, en todo momento, sacar la "x" del denominador (para evitar que pueda ser 0).

Así, llegaremos (sabiendo que las raíces de un polinomio (x-r1)(x-r2)….(x-rn)) a:

$$\lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+8)}{(x-5)}$$

Vemos que podemos el factor (x-5) se anula mutuamente al estar en el numerador y el denominador, luego:

$$\lim_{x\to 5} x+8$$

Sabemos que:

$$\lim_{x\to a} F(x)+G(x)$$

Es lo mismo que:

$$\lim_{x\to a} F(x)+\lim_{x\to a} G(x)$$

Por lo que podremos decir que:

$$\lim_{x\to 5} x+\lim_{x\to 5} 8$$

Ahora, sólo ahora, podríamos sustituir la x. Ahora es el mejor momento para suponer que x está tan cerca de 5 que, prácticamente, es igual a 5:

5+8=13

Luego,

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+8)}{(x-5)}=13$$

CASO 2.

Veamos un caso un poco más raro, con una función trigonométrica:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-4x)}{x}$$

Para resolver este límite tendremos que partir de un axioma previo. Así, sabemos que, por axioma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

También sabemos que:

$$\lim_{x\to a}F(x)\cdot G(x)$$

Es lo mismo que (1):

$$\lim_{x\to a}F(x)\cdot\lim_{x\to a}G(x)$$

Así que, ahora, trataremos de acercar la función trigonométrica del problema, al axioma resulto que tenemos. Así, tendremos que intentar que el denominador sea (-4x), para ello:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-4x)}{x}$$

Multiplicaremos el denominador por 1, pero en esta forma:

$$1=\frac{-4}{1}\cdot\frac{1}{-4}$$

Así:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-4x)}{x\cdot\frac{-4}{1}\cdot\frac{1}{-4}}$$

Que es lo mismo que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-4x)}{-4x\cdot\frac{1}{-4}}$$

Que es lo mismo que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-4x)}{-4x}\cdot -4$$

(Notemos que cuando una fracción multiplica en el denominador, para sacarla hay que invertirla. Recordemos esta regla de simplificación de fracciones [‘el denominador de un denominador es un numerador]’):

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\frac{d}{c}$$

Y ahora, por la regla del producto de los límites (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-4x)}{-4x}\cdot -4$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-4x)}{-4x}\cdot\lim_{x\to 0}-4$$

$$1\cdot -4$$

-4

Luego:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-4x)}{x}=\ -4$$

Límites de una función en un punto por la derecha o por la izda.

Voy a ser muy escueto porque esto no debe presentar mayores problemas. En ningún momento me ha presentado problemas conceptuales.

Podemos decir que cuando:

$$\lim_{x\to 3+} F(x) \neq \lim_{x\to 3-} F(x)$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 3} F(x) \to Does\ Not\ Exist\ (DNE) \to \nexists$$

Igualmente:

$$\lim_{x\to 3+} F(x) = \lim_{x\to 3-} F(x) = L$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 3} F(x) = L \to \exists$$

¿Qué es la continuidad de una función?

Para referirnos a la continuidad de una función podremos decir que cualquier input de la función que se acerque a un 'a' produce, una vez pasa por la función, un output que también se acerca a un 'L'.

Así, decir que una Función es continua en un punto x=a es decir esto:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Pero para poder afirmar esto antes hay que satisfacer otras condiciones condiciones:

1.- Que f(x) esté definida en x=a.

2.- Que exista el límite de f(x) cuando x tiende a 'a'.

Sólo entonces podremos decir que f(a) es el límite de f(x) cuando x tiende a 'a':

3.- $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$

Del mismo modo, ***respecto de intervalos abiertos***, decir que "f(x) es continua en el intervalo (a,b)" es lo mismo que decir que para todo punto c que cumpla a < c < b, f(x) es continua en esos posibles 'c'.

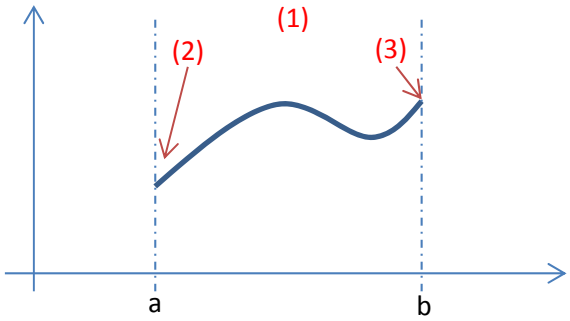
Para ***intervalos cerrados***, en cambio, decir que "f(x) es continua en el intervalo [a,b]" es lo mismo que decir que:

(1) f(x) es continua en el intervalo (a,b)

(2) $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$ (en un principio me llamó la atención que x->a+… abajo el en dibujo se entiende claramente)

(3) $\lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$(en un principio me llamó la atención que x->b-… abajo el en dibujo se entiende claramente)

Naturalmente:



Obviamente en (2) nos acercamos a 'a' por la derecha y a (3) b por la izda. Ésa es la zona que nos interesa. La que está fuera del intervalo, a saber, acercarse a 'a' por la izquierda (a-) o a 'b' por la derecha (b+), no está siendo objeto de estudio ahora.

Teorema del valor medio.

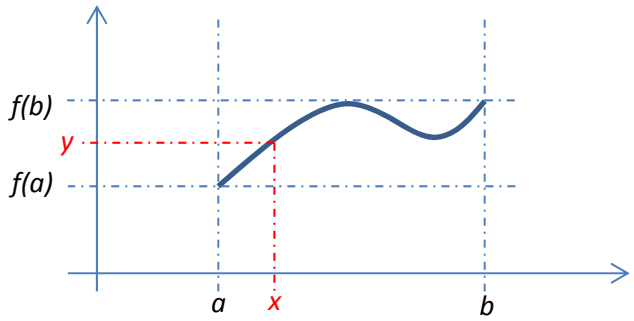
Supongamos que:

F(x) es continua en el intervalo [a,b], e 'y' está entre f(a) y f(b)

Entonces:

Existe, seguro, un valor x entre a y b de manera que f(x) = y.

Esto es absolutamente obvio, viene a decir lo siguiente:



En definitiva, que si la función es continua entre a y b, debe estar definida en algún punto intermedio a ambos. Imposible más obvio. Pero esto que están obvio en términos intuitivos es 'difícil' expresarlo puramente en lenguaje matemático…por eso tantas vueltas. No es porque sea difícil, sino porque para definir algo matemáticamente de manera absolutamente rigurosa, hay que dar bastantes vueltas.

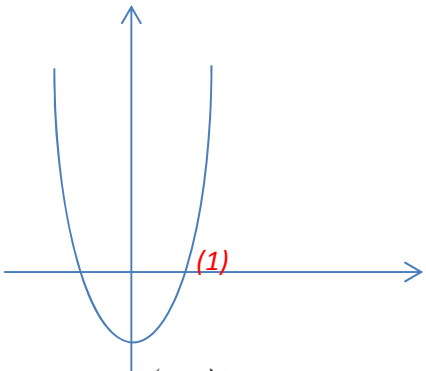
Es imposible que ir de A a B, el fenómeno que definimos es continuos (por ejemplo el movimiento), sin pasar por los puntos intermedios.

Mediante este Teorema podremos estudiar el valor de $\sqrt{2}$.

Supongamos esta función:

$$f(x) = x^2 - 2$$

Su gráfica viene a ser, aproximadamente, esto:



¿Cómo podemos conseguir que f(x) sea 0? ¿Es decir, qué numero podemos encontrar que, elevado al cuadrado, sea = 2?

Para ello vamos a utilizar el Teorema del valor medio.

Lo primero que debemos saber de ella es que es continua.

Probemos en ella diferentes valores:

$$f(1) = 1^2 - 2 = -1$$

$$f(2) = 2^2 - 2 = 2$$

Observemos que la función va desde [-1] hasta [+2]. Además sabemos que es continua…., es decir, NECESARIAMENTE HA PASADO POR 0. Esto, naturalmente también se ve en la gráfica en (1).

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

Podría ir tomando intervalos cada vez más pequeños y que, naturalmente, más se acercaran a hacer la función = 0 (f(-0.5),f(1,5)),…..siempre que me den un valor + y otro negativo, sabré que el 0 está en medio.

Es decir, tiene que haber algún punto en que f(x)=0, esto es:

$$f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}^2 - 2 = 0$$

Es decir, como es un número que contiene infinitos números decimales, no podemos usar un número natural o real, sino uno Irracional (pos fale…hasta aquí nada raro…en todo momento estamos hablando de número Reales).

Un par de ejemplos de ejercicios en el que hay que hacer que una función sea continua:

Choose the value of *k* that makes the following function continuous at *x*=9:

a) (*kx*−4 para x< 9)

b) (6*x*+*k para x*≥ 9)

a) $\lim_{x\to 9-} kx - 4$

k9-4

b) $\lim_{x\to 9+} 6x + k$

54+k

Ahora tenemos que hacer que lo slçimites por izda y dcha coincidan:

(a)=(b)

Es decir:

K9-4=54+k

8k=58

K=$\frac{58}{8} = \frac{29}{4}$

Es decir, para que la función sea continua en x=9, k debe ser 29/4.

Hagamos otro:

Hacer continua la función en x=0 para:

F(x)=

a) $\frac{\mathbf{sin(-8x)}}{\mathbf{8x}}$ $\boldsymbol{x < 0}$

b) $\boldsymbol{2x + 9k - 7}$ $\boldsymbol{x \geq 0}$

a) $\lim_{x\to 0-} \frac{\sin(-8x)}{8x}$

$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin(-8x)}{8x \cdot -1/-1}$

$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin(-8x)}{-8x} \cdot -1$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin(-8x)}{-8x} \cdot \lim_{x\to 0-} -1$$

1·-1

-1

b) $\lim_{x\to 0+} 2x + 9k - 7$

2x cuando x es casi 0, es casi 0

9k-7

Ahora hacemos (a)=(b)

-1=9k-7

6=9k

6/9=k

K=2/3

Un último ejercicio:

F(x)=

a) $\frac{x^2-11+24}{x-8} < 8$

b)-8x+k ≥8

a) $\lim_{x\to 8-} \frac{x^2-11+24}{x-8}$

$\lim_{x\to 8-} \frac{(x-8)(x-3)}{x-8}$

$$\lim_{x\to 8-} x-3$$

5

b) $\lim_{x\to 8+} -8x+k$

-64+k

Ahora hacemos (a) = (b)

5 = -64 + k

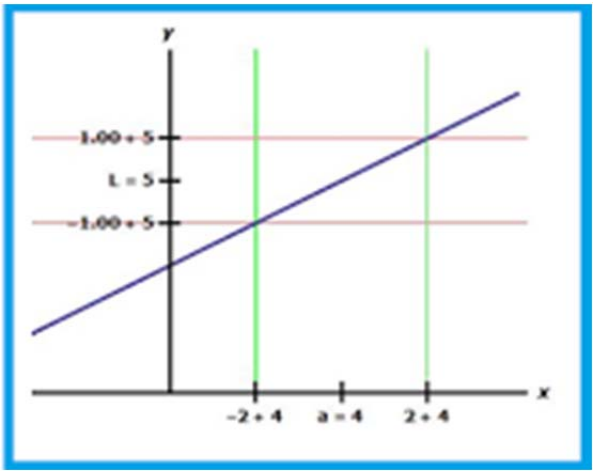
K=69

Siendo k = 69, f(x) es continua en x=8.

Explicaciones definitivas.

https://www.youtube.com/watch?v=xKyL1OO47Ls

Definición de límite por épsilon-delta



Definición épsilon-delta

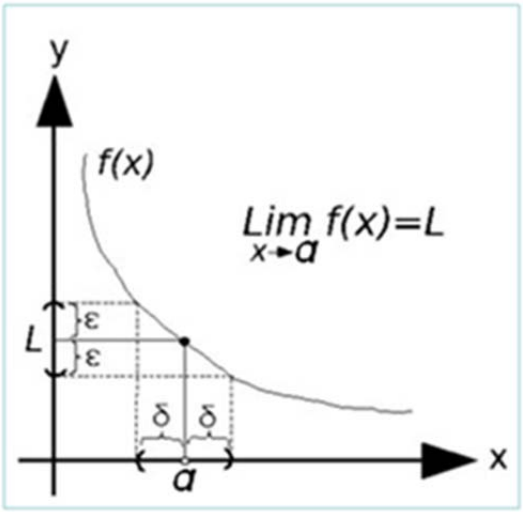
Sea f una función definida en algún intervalo abierto que contenga a **a**.
El límite de **f (x)** cuando **x** tiende **a** es **L**, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

La función **f(x)** tiende hacia el límite **L** en a cuando, para todo **e>0**, existe algún **d>0** tal que, para todo **x** que cumple

$$0<|x-a|<\delta, \text{ es } |f(x)-L|<\varepsilon.$$

(Es decir, que **lím f(x) = L** cuando **x->a** si y solo si se cumplen las condiciones indicadas.)
Esta definición **(E, δ)** es el laborioso resultado de más de cien años de intentos teóricos.



Tal definición significa la completa reagudización de un concepto, el de límite, que es indispensable para definir a su vez los dos conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal: los de derivada e integral.

Demostración de límites de una función de variable real mediante el método ε-δ.

Comprendámoslo mediante la solución de este caso (A):

$$\lim_{x\to 2} x^2 + x - 2 = 4$$

Definición formal de Límite:

$$(\forall x > 0, \exists \delta > 0, tal\ que, |x - a| < \delta \rightarrow |F(x) - L| < \varepsilon)$$

Necesitamos un **ε** en el **'rango'** (eje de la y, donde se manifiesta la función) mayor que 0 (obvio que el hecho de que se obligue a que sea >0 implica, naturalmente, que exista, pues se trata de una distancia).

El valor de ε debe estar vinculado, mediante el algoritmo de la función estudiada, a un valor **δ**, también mayor que 0, en el **'dominio'** (eje de la x, donde se manifiesta x).

Según la definición de límite partimos de los siguientes axiomas:

$$| F(x) - L | < \varepsilon$$

$$x^2 + x - 2 = 4$$

$$|x^2 + x - 2 - 4| < \varepsilon$$

$$|x^2 + x - 6| < \varepsilon$$

… y…

$$| x - a | < \delta$$

$$|x - 2| < \delta$$

Así, procedemos primero a clarificar la relación de la Función con Épsilon.

'Paso ÉPSILON'

Para ello extraemos las raíces de la función polinómica (sus soluciones…) y, según los principios de la factorización de un polinomio, sabemos que (x-r) es un factor de dicho polinomio, luego, siendo las raíces del polinomio en cuestión: -3 y 2, entonces podemos factorizar el polinomio:

$$|x^2 + x - 6| < \varepsilon$$

O lo que es lo mismo:

$$|x^2 + x - 6| < \varepsilon$$

$$(1)\ |x - 2||x + 3| < \varepsilon$$

'Paso DELTA'

Ahora intentamos ver la relación que hay entre delta y épsilon (pues obviamente, están relacionados mediante la misma función que se está estudiando).

Sabemos que delta la hemos relacionado con |x-2|, así que veamos la proporcionalidad con Épsilon:

Viniendo de (1) hacemos que:

$$(2)\ |x - 2| < \frac{\varepsilon}{|x+3|}$$

Sin embargo vemos que el valor de Épsilon sigue estando condicionado a **"X"**, y esto no puede ser**. IMPORTANTE**. Sólo cuando esto es así (la relación delta-épsilon está condicionada a una x) es cuando tenemos que suponer valores a delta para "despejar" la "X" pues, repetimos, la relación entre Delta y Épsilon no puede depender de X. Si no fuera así, pues nada, quedaría algo así como δ = ε/5 y se acabó…, pero si la "X" está en juego (como en el caso que nos ocupa), entonces, tenemos que suponer un valor a Delta, para ir definiendo el rango.

¿Qué valor suponer a Delta? (esto me ha dado tela de quebraderos de cabeza) Dicen que el que nos salga de los cojones. Naturalmente, debería ser un valor que forme parte del dominio (en el caso del polinomio de ahora, todos los números reales). Dicen que conviene que sea cercano a 0 pues, mientras más pequeño sea el rango delta, más preciso sería el acercamiento al Límite en ε.

En este caso podría ser 1, o ½, o 1/3 … siempre acercándonos a 0.

Usemos un δ=1

Sabemos, por los axiomas, que |x-2| <δ

Despejando el valor absoluto (esto está en el epígrafe de obviedades), y suponiendo δ=1, tenemos que:

$$(3)\ -1 < |x-2| < 1$$

Para despejar la x en esta inecuación haremos (+2 en todos los términos):

(4) 1 < x < 3

Esto es, sabiendo que, según la definición misma de este problema, es decir, que x tiende a 2, suponiendo que x se acerca mucho al 2, los máximos valores que adoptaría serían muy cercanos o al 3 o al 1 ya que hemos supuesto que |x-2| está entre -1 y 1 (hemos supuesto delta = 1 en el paso (3)).

Ya sabemos los valores que puede tomar x. Ahora busquemos lo que hay en el Épsilon dependiente de X y cuya dependencia queremos cargarnos. Para ello hacemos lo siguiente, sobre (4) (+3 en todos los términos), es decir, veamos qué valores puede tomar la expresión en |x+3|:

(5) 4 < x+3 < 6

Ahora recordemos esto:

$$(2)\ |x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+3|}$$

Si queremos hacer que el conjunto ($\frac{\varepsilon}{|x+3|}$) sea lo más pequeño posible, tendremos que hacer que el denominador sea lo más grande posible. Es decir, hacer que |x+3| sea lo más grande dentro de sus posibilidades. Para ello nos bastará con coger el valor más alto del rango posible definido en (5):

(5) 4 < x+3 < 6

Es decir, 6. De manera que tendríamos esto para delta (2):

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+3|}$$

Lo mismo que:

$$\delta < \frac{\varepsilon}{6}$$

Así, podremos decir que el valor de delta estará entre lo que me dé el mínimo entre **1** (primera suposición independiente sobre δ) y $\frac{\varepsilon}{\mathbf{6}}$ (dependiente de su relación con la función), o en notación matemática:

$$\delta = min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$$

Hasta aquí la solución del problema pero… ¿Qué quiere decir esto?

Esto quiere decir lo siguiente. Recordemos que:

(1) |x-2| |x+3|

Esto podemos redefinirlo como |x-2||x+3|<|x-2|6 pues sabemos que, por (5), x+3, **como mucho**, puede ser 6 (muy cercano a 6).

Es decir: |x-2||x+3|<|x-2|6

Ahora tenemos que:

|x-2|6, es decir, delta 6: δ6.

Pero delta oscilaba entre 1 y $\frac{\varepsilon}{6}$ (ver solución), tomamos $\frac{\varepsilon}{6}$ (que es más pequeño que 1….¿?...eso dice…):

$$|x-2|6 \rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{6}6 \quad \rightarrow \quad \varepsilon$$

Es decir, que |x-2| |x+3| < ε

Es decir, que |F(x) – L| < ε, como decíamos al principio.

CASO (B) (no habrá que suponer ningún valor de delta porque épsilon no dependerá de x):

$$\lim_{x\to 3} 7 - 3x = -2$$

Definición formal de Límite:

$$(\forall x > 0, \exists \delta > 0, tal\ que, |x-a| < \delta \rightarrow |F(x) - L| < \varepsilon)$$

Planteamos lo siguiente:

$$|7 - 3x + 2| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \delta$$

(a) Veamos Épsilon:

$$|7 - 3x + 2| < \varepsilon$$

$$|-3x + 9| < \varepsilon$$

$$3|-x+3|<\varepsilon$$

Vamos a hacer que |-x+3| se parezca más al delta que tenemos: |x-3|

Sabemos, por las propiedades de valor absoluto, que |3-x| = |x-3|, ¿por qué?

Miremos un ejemplo:

Sabemos que el valor absoluto es una "distancia", es decir, la diferencia entre dos magnitudes, y a la que daremos siempre un valor positivo. En definitiva es saber que la distancia que hay entre 3 y 4 es la misma que la que hay entre 4 y 3. Al final, nos dé lo que nos dé, le vamos a poner signo positivo. Por eso, por ejemplo:

|4-3| = |3-4|

Ya que

|1| = |-1|

Pues

|1|=1

Y

|-1|=1

Por eso podemos hacer esto en nuestro ejercicio:

|3-x| = |x-3|

De manera que:

$$3|x-3|<\varepsilon$$

(b) Ahora despejemos delta y dejémosla en función de épsilon (como no hay X, no es necesario suponer ningún valor a delta (como tuvimos que hacer en el caso anterior)):

|x-3|< δ

Como eso ya lo tenemos en la definición que hemos hecho de Épsilon, tendríamos que, usando ambas combinadas:

$$3|x-3|<\varepsilon$$

$$3\delta<\varepsilon$$

Luego:

$$\delta<\frac{\varepsilon}{3}$$

Así, tenemos que:

$$(\forall x > 0, \exists \delta > 0, tal\ que, |x-3| < \delta \rightarrow |7-3x+2| < \varepsilon)$$

Dos 'Fallo' elemental en el que no caer:

<u>Factorización.</u>

Recordar que al factorizar un polinomio, la constante que multiplica a la incógnita de mayor coeficiente debe conservarse.

Ejemplo:

$$\mathbf{2}x^2 - x - 1 = 0$$

$$\mathbf{2}|x-2||x+1| = 0$$

Explicaciones definitivas.

Valor absoluto.

(1) | x | = D, donde D siempre será D > 0, esto es: x, el valor de "X", lo que está dentro de |…| puede ser ∓D. Es decir, quitando las barras de valor absoluto:

| x | = D, es lo mismo que: x = ∓D

(Al quitar las barras!! Parece una tontería, pero no lo es!)

Ejemplo: | -2 | = 2, | 2 |= 2, …

(2) | x | < D, esto es, x, el valor de "X", lo que está dentro de |…| debe ser un valor que, al quitarle el signo, sea menor que D.

Esto me costó un poco comprenderlo al principio porque quise entenderlo con prisas. En un principio rápido quise entender algo así como que (despejando las barras de valor absoluto) x < ∓D… pero ESTO ESTÁ MAL, OBVIAMENTE MAL. Un claro ejemplo de pensar precipitadamente. Es IMPORTANTE, considerar que esto no es una igualdad, sino una desigualdad.

Lo que estamos evaluando es la "X", es decir, "X" debe tomar un valor cualquiera de manera que , cuando "eliminemos su signo", su valor absoluto esté por debajo de D.

Es decir:

| x | < D, es lo mismo que: -D < x < +D

Un ejemplo:

| x | < 2, esto es, X debe tomar un valor tal que, al quitarle el signo, su valor absoluto sea menor que 2.

Antes, pensando mal decía, por ejemplo, pues si X = -5, como -5 es menor que 2, ese valor satisface la desigualdad… como hemos visto, pensando precipitadamente. Si X = -5, cuando , evaluemos por valor absoluto y quitemos el signo, será 5 y, por lo tanto, no satisfará 5<2. Es decir, tiene que ser tener un valor absoluto menor que 2. Algo que, antes de evaluar como valor absoluto, sea muy muy pequeño, al evaluarlo como valor abs, será muy muy grande y, por lo tanto, se saldrá del dominio.

Esto es muy obvio, pero al principio es fácil cagarla.

Así, | x | < 2 es -2 < x < +2, es decir un intervalo abierto (recordemos que no es ≤) que va desde -2 hasta +2, a saber: x = (-2,+2)

(3) | x | ≤ D, esto es justo lo mismo que (2) pero con la salvedad de que ahora es menor o igual, es decir, se resuelve mediante –D ≤ x ≤ +D. Es decir, en este caso el dominio es un intervalo cerrado. En el caso del ejemplo anterior, si | x | ≤ 2, el dominio será: x = [-2,+2].

| x | ≤ D, es lo mismo que: -D ≤ x ≤ +D

(4) | x | > D, en este caso tendríamos la unión de dos intervalos. Si en (3) tenáismo, por decirlo de algún modo, un dominio de "círculo" en torno a un punto central, en este caso, (4), lo que tendremos es, precisamente, lo que queda fuera de ese círculo. Es, por lo tanto, la unión de dos "zonas externas".

Es decir:

| x | > D, es lo mismo que : x < -D U x > D

*U= Unión.

Lo mismo para ≥

Algunas notas interesantes sobre el Valor Absoluto.

Sabemos que el modo de operar con las inecuaciones es 'hacer lo mismo en un lado que en otro'.

(5) Por ejemplo:

| x -3 | < 9

-9 < x-3 < 9

Sumamos (+3) en todos los miembros:

-6 < x < 12

(6) Al multiplicar por algún valor negativo, el signo de la inecuación se invierte. (OJO, no seguro)

(7) ¿y a la inversa?, retornar a valor absoluto, por ejemplo: (OJO, no seguro)

-9 < x < -7

Se cambian los signos de los números y se invierten los signos de la desigualdad:

9 > | x | > 7

	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\csc\alpha$	$\sec\alpha$	$\cot\alpha$
$\operatorname{sen}\alpha$	*sen α*	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\csc\alpha}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$	*cos α*	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	*tan α*	$\pm\frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\csc\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	*csc α*	$\pm\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}$
$\sec\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$	$\pm\frac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$	*sec α*	$\pm\frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	$\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	*cot α*

Juan Sulis Borrallo

Ejercicios de Cálculo 1. PARTE 1-50

1.-

$$\int \boldsymbol{xe^x\,dx} = ¿\,?$$

Usamos la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x} \qquad du = dx$$

$$w = e^x \qquad \boldsymbol{dw = e^x dx}$$

Aplicamos la regla de la integración por partes:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x dx = \boldsymbol{xe^x - e^x + C}$$

2.-

$$\int \boldsymbol{x^2e^{-x}\,dx} = ¿\,?$$

Usamos la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x^2} \qquad du = 2x\,dx$$

$$w = -e^{-x} \qquad \boldsymbol{dw = e^{-x}dx}$$

Aplicamos la regla de la integración por partes:

$$\int x^2e^{-x}\,dx = -\left(x^2e^{-x} - \int -e^{-x}\,2x\,dx\right) = -\left(x^2e^{-x} + \int e^{-x}\,2x\,dx\right)$$

Volvemos a aplicar la integración por partes (ojo al seleccionar las variables auxiliares y no caer en el ciclo que nos llevaría de nuevo a un x^2):

$$\boldsymbol{u = 2x} \qquad du = 2\,dx$$

$$w = e^{-x} \qquad \boldsymbol{dw = -e^{-x}dx}$$

Aplicamos, de nuevo, la regla de la integración por partes:

$$= -\left(x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - \int e^{-x}\,2\,dx\right) =$$

$$= -(x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2(-e^{-x})) + C =$$

$$= -\boldsymbol{\left(x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x}\right) + C}$$

3.-

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathbf{tan^{-1}}\, \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx} = ¿\,?$$

$$\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int_0^1 \cos x \csc x\, dx =$$

Apliquemos la derivación por partes:

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{csc}\, \boldsymbol{x} \qquad\qquad du = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$w = \sin x \qquad\qquad \boldsymbol{dw} = \mathbf{cos}\, \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx}$$

Ahora:

$$= -\sin x \csc x|_0^1 - \int_0^1 \sin x \frac{-\cos x}{\sin^2 x} dx =$$

$$= -\sin x \csc x|_0^1 - \int_0^1 \frac{-\cos x}{\sin x} dx = -\sin x \csc x|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

De donde:

$$\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx = -\sin x \csc x|_0^1 + \int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$$

Arrrgg…no nos vale… Probemos a seleccionar diferentes variables auxiliares:

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathbf{tan^{-1}}\, \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx} = \int_0^1 \cos x \csc x\, dx =$$

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{cos}\, \boldsymbol{x} \qquad\qquad du = -\sin x\, dx$$

$$w = -\ln(\mathrm{ctg\ x} + \csc \mathrm{x}) \qquad\qquad \boldsymbol{dw} = \mathbf{csc}\, \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx}$$

Es decir:

$$\int_0^1 \cos x \csc x\, dx = \cos x\,(-\ln(\mathrm{ctg\ x} + \csc \mathrm{x})) -|_0^1 - \int_0^1 (-\ln(\mathrm{ctg\ x} + \csc \mathrm{x}))(-\sin x)\, dx$$

Bufff, esto complica mucho las cosas… Replanteemos el problema… Cuando las cosas se ponen tan 'raras' mejor buscar otra estrategia. Planteémoslo como le producto de ctg x * 1:

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathbf{tan^{-1}}\, \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{1}\, \boldsymbol{dx} = ¿\,?$$

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{tan^{-1}}\, \boldsymbol{x} \qquad\qquad du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$w = x \qquad\qquad \boldsymbol{dw} = \mathbf{1}\, \boldsymbol{dx}$$

Luego:

$$\int_0^1 \tan^{-1} x \cdot 1\, dx = \tan^{-1} x \cdot x|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

Para resolver la integral de la derecha, apliquemos la u sustitución simple:

$$u = 1 + x^2 \qquad\qquad du = 2x\, dx$$

Luego el segundo integrando:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_0^1$$

Si seguimos sustituyendo por donde íbamos:

$$\int_0^1 \tan^{-1} x \cdot 1\, dx = \tan^{-1} x \cdot x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}} - \mathbf{0}\right) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln}\,\mathbf{2} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}} - \boldsymbol{ln}\sqrt{\mathbf{2}}$$

4.- (CALCULUS 239) Calcular el volumen generado por un plano de revolución que gira en torno al eje de ordenadas (y) . El plano está definido por el área comprendida entre las funciones:

$$f(x) = x + 1 \quad \& \quad g(x) = (x-1)^2$$

4.1. Lo vamos a calcular tanto por 'shells' como por 'washers'. Empezaremos por 'shells'.

Vamos a definir el escenario gráficamente. Representemos gráficamente las funciones:

a) ¿Dónde interseccionan? Para ello:

$$x + 1 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow x^2 - 3x = 0$$

Raíces en: x = 0 y x = 3. Es decir, sustituyendo en cualquiera de las funciones en los puntos (0,1) y (3,4).

b) f(x) es lineal y ya tenemos dos puntos por lo que no tendremos ningún problema en dibujarla. Centrémonos en g(x). A priori ya sabemos que tendrá forma parabólica. Busquemos su crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos (la convexidad y concavidad la podremos, directamente, suponer…).

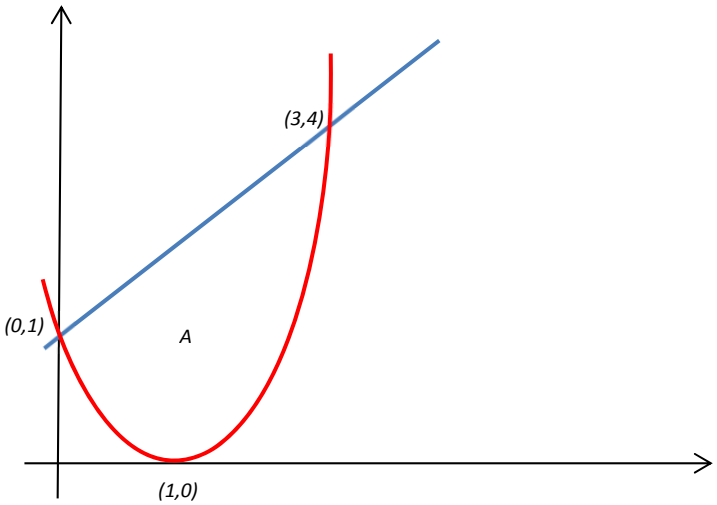
Mínimo:

$$g(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$g'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow p.m.(1,0)$$

$$g(x) < 0\ a\ izda\ de\ 1\ (decrece) y\ g(x) > 0\ a\ dcha\ de\ 1\ (crece)$$

El escenario es, pues, el siguiente (ojo, no he respetado las proporciones):



Vamos a hacer girar la región 'A' en torno al eje de la 'y', y vamos a hacerlo mediante shells. ¿Qué es una Shell? ¿Cuál era su fórmula? Como no lo recordamos, vamos a deducirla: es un cilindro que se sustrae a otro y en el que la diferencia entre R y r es prácticamente nula (cáscara de la shell súper fina):

El volumen de un cilindro es:

$$\pi r^2 h$$

Si le queremos quitar al 'cilindro grande, el pequeño':

$$\pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R^2 - r^2) = \pi h(R + r)(R - r)$$

Recordemos que R y r son casi iguales y que, ojo, esas distancias se miden en 'x':

$$\pi h 2r\, dr = 2\pi hr\, dr \rightarrow 2\pi hx\, dx$$

Este es el volumen de una Shell de tamaño infinitesimal.

¿Cuál es la altura? f (x) – g (x)

$$h = x + 1 - (x^2 - 2x + 1) = x + 1 - x^2 + 2x - 1 =$$

$$h = -x^2 + 3x$$

¿En qué intervalo medimos? Desde x = 0 a x = 3.

Luego, podemos decir:

$$V_{revolución} = \int_0^3 2\pi hx\, dx \rightarrow \int_0^3 2\pi(3x - x^2)x\, dx = \int_0^3 2\pi(3x^2 - x^3)\, dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{3x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^3 = 2\pi\left(\frac{3 \cdot 3^3}{3} - \frac{3^4}{4}\right) - 2\pi\left(\frac{3 \cdot 0^3}{3} - \frac{0^4}{4}\right) =$$

$$= 2\pi\left(27 - \frac{81}{4}\right) = 2\pi\left(\frac{108 - 81}{4}\right) = 2\pi\left(\frac{27}{4}\right) = \mathbf{\frac{27}{2}\pi}$$

4.2. Ahora lo haremos por 'washers'.

Ya conocemos los puntos de corte y las formas geométricas involucradas en el problema. Calculemos, ahora el volumen usando 'washers'. No recuerdo la fórmula así que vamos a deducirla. Sabemos que es un cilindro que se quita a otro, pero el diferencial, ahora no es la anchura de la 'piel' sino la altura del cilindro.

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

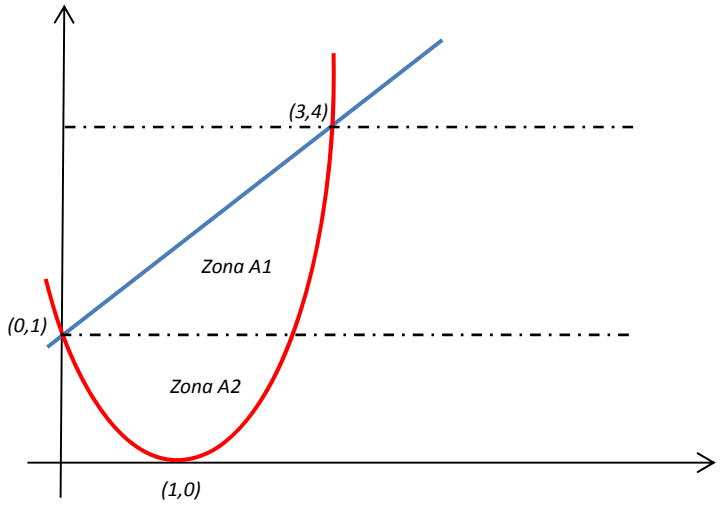
Sustrayendo 'el cilindro pequeño del grande' (donde 'R' y 'r' son valores de 'x'):

$$V_{arandela} = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi(R^2 - xr^2)h$$

Donde h es infinitesimal:

$$= \pi(R^2 - r^2)dy$$

Por otro lado, ojo, la gráfica, estudiando el área 'en sentido horizontal', tal y como vemos abajo, tiene una definición del radio cambiante según las zonas:



Zona A1.

Puesto que el enfoque es 'horizontal', necesitaremos los radios en función de 'y' (sabemos por la representación gráfica que, en la Zona A1, f(x) supone el radio pequeño y que g(x) el grande:

$$f(x) = x + 1 \quad \& \quad g(x) = (X - 1)^2$$

Busquemos la función inversa:

$$f(x) \rightarrow x = y - 1$$

$$g(x) \rightarrow y = (X-1)^2 \rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{(X-1)^2} \rightarrow \sqrt{y} = X - 1 \rightarrow X = \sqrt{y} + 1$$

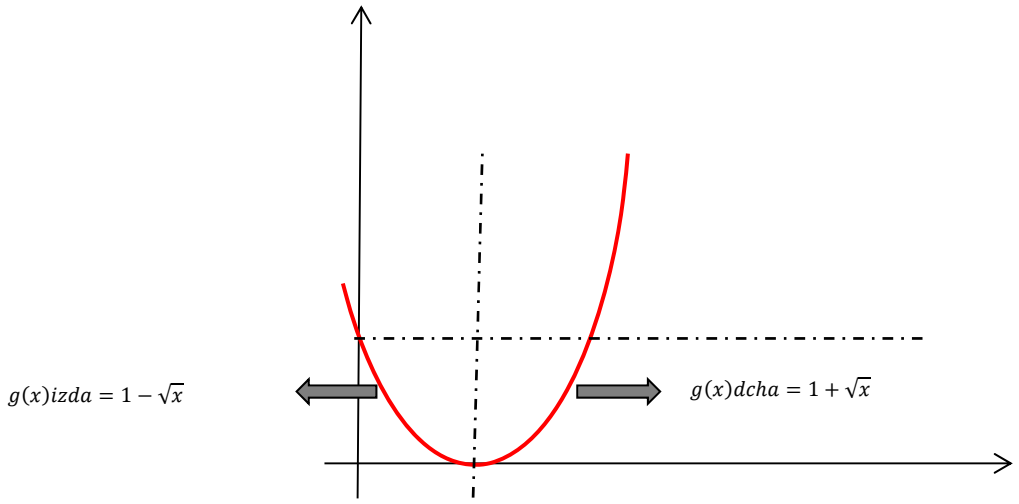
¿En qué intervalo se mueve 'dy', en la Zona A1? Mirando la gráfica vemos que en: [1,4]

Ahora, sustituyamos:

$$\int_1^4 \pi(X^2 - x^2)dy \rightarrow \int_1^4 \pi\left((\sqrt{y}+1)^2 - (y-1)^2\right)dy$$

Zona A2.

Aquí, la definición del radio es diferente. Es el área de la parte de la derecha de la parábola hasta el eje de la 'y' menos el área de la parte izquierda de la parábola hasta el eje de la 'y'. Esto es, debemos partir la parábola en sus dos mitades (este paso hay que terminarlo bien… lo he esbozado…pero no encuentro el modo de fijarlo bien del todo..):



Es decir, los radios, en función de x, en esta zona son (téngase en cuenta el follón de giros… aquí r es 'y') (Ver bien este paso de dividir la parábola…):

$$R = 1 + \sqrt{y}$$

$$r = 1 - \sqrt{y}$$

Es decir, aplicando, ahora, la fórmula de las arandelas:

$$\int_0^1 \pi(R^2 - r^2)dy = \int_0^1 \pi\left((1+\sqrt{y})^2 - (1-\sqrt{y})^2\right)dy$$

Ahora, uniendo las dos zonas (Zona A1 y Zona A2):

$$\pi \int_0^1 \left((1+\sqrt{y})^2 - (1-\sqrt{y})^2\right)dy + \pi \int_1^4 \left((\sqrt{y}+1)^2 - (y-1)^2\right)dy$$

$$= \pi \int_0^1 [y + 1 + 2\sqrt{y} - (y + 1 - 2\sqrt{y})]dy + \pi \int_1^4 [y + 1 + 2\sqrt{y} - (y^2 + 1 - 2y)]dy =$$

$$= \pi \int_0^1 [y + 1 + 2\sqrt{y} - y - 1 + 2\sqrt{y}]dy + \pi \int_1^4 [y + 1 + 2\sqrt{y} - y^2 - 1 + 2y]dy =$$

$$= \pi \int_0^1 4\sqrt{y}\, dy + \pi \int_1^4 -y^2 + 3y + 2\sqrt{y}\, dy =$$

$$= \pi(\frac{8y^{\frac{3}{2}}}{3})\Big|_0^1 + \pi(\frac{-y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} + \frac{4y^{\frac{3}{2}}}{3})\Big|_1^4 =$$

$$= \pi\left(\frac{8 \cdot 1}{3} - 0\right) + \pi\left[\left(\frac{-4^3}{3} + \frac{3 \cdot 4^2}{2} + \frac{4 \cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3}\right) - \left(\frac{-1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} + \frac{4 \cdot 1^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\right]\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{8\pi}{3} + \frac{65\pi}{6} = \mathbf{\frac{27\pi}{2}}$$

Con las washers llegamos al mismo resultado que con las shells… pero, como habremos comprobado, de una manera bastante menos simple. Es importante seleccionar bien la estrategia con la que atacar el problema.

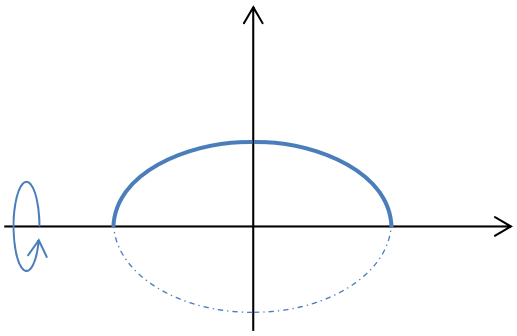
5.- Calcular el volumen del cuerpo de revolución generado la rotación de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ sobre el eje de abscisas.

Lo primero que habremos de hacer es transformar la expresión al modo explícito:

$$y = \sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}}$$

Es fácil ver que y =0 (puntos de corte del eje de abscisas) en +3 y -3.

La representación gráfica de esta función viene a ser algo así:



Vamos a usar arandelas para calcular éste cuerpo de revolución. Es bastante simple:

$$\int_{-3}^{3} \pi(R^2 - r^2)\, dx$$

Sabemos que el radio menor es = 0, luego:

$$\int_{-3}^{3} \pi(R^2)\, dx$$

'R' lo tenemos ya en función de 'x':

$$\int_{-3}^{3} \pi\left(\sqrt{\frac{36-4x^2}{9}}^{2}\right) dx = \pi \int_{-3}^{3} \frac{36-4x^2}{9}\, dx =$$

$$= \pi \int_{-3}^{3} \frac{36}{9}\, dx - \pi \int_{-3}^{3} \frac{4x^2}{9}\, dx =$$

$$= \frac{36\pi x}{9} - \frac{4x^3\pi}{27}\Big|_{-3}^{3} =$$

$$= \frac{36\pi 3}{9} - \frac{4 \cdot 3^3\pi}{27} - \left(\frac{36\pi(-3)}{9} - \frac{4 \cdot (-3)^3\pi}{27}\right) =$$

$$= \frac{36\pi 3}{9} - \frac{4 \cdot 3^3\pi}{27} - \left(-\frac{36\pi(3)}{9} + \frac{4 \cdot (3)^3\pi}{27}\right) =$$

$$= \frac{36\pi 3}{9} - \frac{4 \cdot 3^3\pi}{27} + \frac{36\pi(3)}{9} - \frac{4 \cdot (3)^3\pi}{27} = \boldsymbol{16\pi}$$

6.-

$$\int \boldsymbol{2x\left(x^2+4\right)^5 dx}$$

Menudo rollo desplegar el paréntesis… Usemos u-sustitución, está a huevo:

$$u = x^2 + 4 \qquad du = 2x\, dx$$

$$\int (u)^5\, du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\boldsymbol{(x^2+4)^6}}{\boldsymbol{6}} + \boldsymbol{C}$$

7.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+1}}}\boldsymbol{dx}$$

$$u = x^2 + 1 \qquad du = 2x\,dx$$

Tuneamos el integrando original:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Ahora sustituimos:

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{u^{1/2}}{1/2} = u^{1/2} = (x^2+1)^{1/2} = \boldsymbol{\sqrt{x^2+1}} + \boldsymbol{C}$$

8.-

$$\int \boldsymbol{xe^{5x}\,dx}$$

Apliquemos la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x} \qquad\qquad du = dx$$

$$\boldsymbol{dw = e^{5x}dx}$$

$$z = 5x \quad dz = 5\,dx \rightarrow \frac{1}{5}\int e^u du \rightarrow \frac{e^{5x}}{5} \rightarrow$$

$$w = \frac{e^{5x}}{5}$$

$$= \frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}dx$$

Ahora, el segundo término, por u-sustitución normal y corriente:

$$u = 5x \qquad du = 5dx$$

$$= \frac{xe^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\int 5e^{5x}dx$$

$$= \frac{xe^{5x}}{5} - \frac{1}{25}\int e^u du = \frac{xe^{5x}}{5} - \frac{1}{25}e^u =$$

$$= \boldsymbol{\frac{xe^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25} + C}$$

9.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{3-x^3}}\boldsymbol{dx}$$

$$u = 3 - x^3 \qquad du = -3x^2 dx$$

$$\frac{1}{-3}\int \frac{(-3)\cdot x^2}{3-x^3}dx = \frac{1}{-3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{-3}\int u^{-1}du =$$

$$= \frac{1}{-3}\ln|u| + C = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{-3}}\boldsymbol{\ln|3-x^3|} + \boldsymbol{C}$$

10.-

$$\int \frac{\boldsymbol{e^{2x}-e^{-2x}}}{\boldsymbol{e^{2x}+e^{-2x}}}$$

$$u = e^{2x} + e^{-2x} \qquad du = 2e^{2x} + (-2)e^{-2x}dx = 2e^{2x} - 2e^{-2x}dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{e^{2x}+e^{-2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-1}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\ln|e^{2x}+e^{-2x}|} + \boldsymbol{C}$$

11.-

$$\int \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{xln(x^2)}}\boldsymbol{dx}$$

$$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$$

$$x = \sqrt{u} \qquad dx = \frac{1}{2\sqrt{u}}du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}ln(u)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \int \frac{1}{2uln(u)}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{uln(u)}du =$$

$$r = uln(u) \qquad dr = \ln u + 1du$$

12.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2+25}}\boldsymbol{dx}$$

$$u = x^2 + 25 \qquad\qquad du = 2x\,dx$$

Tuneamos el integrando:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+25}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int u^{-1}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \mathbf{\frac{1}{2}\ln\left|x^2+25\right| + C}$$

Como es un cuadrado, podríamos quitar las barras de valor absoluto (o dejarlas… que también es válido):

$$\mathbf{\frac{1}{2}\ln\left(x^2+25\right) + C}$$

13.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x^3+x^2-6x}}\boldsymbol{dx}$$

Replanteemos el integrando:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x^2+x-6x)}$$

Veamos las raíces del polinomio cuadrático:

$$x^2 + x - 6x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

También podríamos haber sacado las raíces por Ruffini…

Entonces, una vez con las raíces, podremos decir que (¡recuérdese el cambio de signo de la raíz!):

$$\frac{x+1}{x(x^2+x-6x)} \rightarrow \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+3)}$$

Pasamos el denominador de la izda a la dcha:

$$x+1 = \frac{A}{x}x(x-2)(x+3) + \frac{B}{(x-2)}x(x-2)(x+3) + \frac{C}{(x+3)}x(x-2)(x+3)$$

$$x+1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$$

Empecemos a despejar. Vamos a cargarnos la C. Supongamos x = 0 (la 'B' cae también):

$$x+1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$$

$$0+1 = A(0-2)(0+3) + B0(0+3) + C0(0-2)$$

$$1 = A(-2)(+3)$$

$$1 = -6A \rightarrow A = -\frac{1}{6}$$

Ahora vamos a cargarnos la A. Supongamos x = -3:

$$x + 1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$$

$$(-3) + 1 = A((-3)-2)((-3)+3) + B(-3)((-3)+3) + C(-3)((-3)-2)$$

$$-2 = C15 \rightarrow C = \frac{-2}{15}$$

Ahora, busquemos la B Supongamos x = 1 (casi siempre esta suposición es la más fácil):

$$x + 1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$$

$$1 + 1 = (-\frac{1}{6})(1-2)(1+3) + B1(1+3) + (\frac{-2}{15})1(1-2)$$

$$1 + 1 = (-\frac{1}{6})(-1)(4) + B1(4) + (\frac{-2}{15})1(-1)$$

$$2 = (-\frac{1}{6})(-4) + 4B + (\frac{2}{15})$$

$$2 = \left(\frac{4}{6}\right) + 4B + \left(\frac{2}{15}\right) \rightarrow 2 - \frac{4}{6} - \frac{2}{15} = 4B$$

$$\frac{6}{5} = 4B \rightarrow B = \frac{3}{10}$$

Ahora podremos resolver muy fácilmente:

$$\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x} dx = \int \frac{-\frac{1}{6}}{x} + \frac{\frac{3}{10}}{(x-2)} + \frac{\frac{-2}{15}}{(x+3)} dx$$

Que es:

$$= -\mathbf{\frac{1}{6}}\mathbf{\ln|x|} + \mathbf{\frac{3}{10}}\mathbf{\ln|x-2|} - \mathbf{\frac{2}{15}}\mathbf{\ln|x+3|} + \boldsymbol{C}$$

14.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}}{\boldsymbol{x^3 - x^2 - 2x}}\boldsymbol{dx}$$

Vemos que el numerador es mayor que el denominador. Procedemos a realizar la división:

$\boldsymbol{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}$	$\boldsymbol{x^3 - x^2 - 2x}$
	Cociente parcial propuesto: x
A restar:$\boldsymbol{x^4 - x^3 - 2x^2}$	
Resto parcial:$\boldsymbol{-2x^3 + 2x^2 - 3x - 2}$	
	Cociente parcial nuevo propuesto: -2
A restar: :$\boldsymbol{-2x^3 + 2x^2 + 4x}$	
Resto parcial:$\boldsymbol{-7x - 2}$	
Resto final: :$\boldsymbol{-7x - 2}$	**Cociente definitivo:** $\boldsymbol{x - 2}$

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}dx = \int x - 2\,dx + \int \frac{-7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}dx$$

La primera parte la dejamos ya hecha:

$$\int x - 2\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

Vamos a por la segunda que, siempre, es la jodida (ojo no olvidemos el signo menos que antecede a todo!):

$$\int \frac{-7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}dx = -\int \frac{7x + 2}{x^3 - x^2 - 2x}dx =$$

$$\int \frac{7x + 2}{x(x^2 - x - 2)}$$

Busquemos las raíces del polinomio cuadrático que tenemos en el denominador:

$$x^2 - x - 2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Luego podemos seguir redefiniendo el integrando como:

$$\frac{7x + 2}{x(x^2 - x - 2)} = \frac{7x + 2}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x - 2)} + \frac{C}{(x + 1)}$$

Sigamos despejando, pasemos el denominador de la izda a la dcha:

$$7x + 2 = \frac{A}{x}x(x - 2)(x + 1) + \frac{B}{(x - 2)}x(x - 2)(x + 1) + \frac{C}{(x + 1)}x(x - 2)(x + 1)$$

$$7x + 2 = A(x - 2)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 2)$$

Vamos a cargarnos el C y el B. Propongamos x = 0:

$$7x + 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

$$7 \cdot 0 + 2 = A(0-2)(0+1) + B0(0+1) + C0(0-2)$$

$$A = -1$$

Ahora vamos a cargarnos la A. Proponemos x = -1 (también cae la B):

$$7x + 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

$$7(-1) + 2 = A((-1)-2)((-1)+1) + B(-1)((-1)+1) + C(-1)((-1)-2)$$

$$-5 = 3C \rightarrow C = -\frac{5}{3}$$

Despejemos B. Para ello propongamos una x = 1.

$$7(1) + 2 = (-1)\big((1)-2\big)\big((1)+1\big) + B(1)\big((1)+1\big) - \frac{5}{3}(1)\big((1)-2\big)$$

$$9 = 2 + 2B + \frac{5}{3} \rightarrow 2B = 7 - \frac{5}{3} \rightarrow B = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Ahora podemos seguir adelante con nuestra integral (ojo, la segunda parte)... y recordemos el signo negativo que precede:

$$-\int \frac{7x+2}{x^3 - x^2 - 2x}dx = \int -\frac{-1}{x} - \frac{\frac{8}{3}}{(x-2)} - \frac{-\frac{5}{3}}{(x+1)}dx \rightarrow$$

$$\int \frac{1}{x} - \frac{\frac{8}{3}}{(x-2)} + \frac{\frac{5}{3}}{(x+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{\frac{8}{3}}{(x-2)}dx + \int \frac{\frac{5}{3}}{(x+1)}dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{5}{3}\ln|x+1|$$

Y no olvidemos la primera parte de la integral, es decir, el resultado final es:

$$= \boldsymbol{\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| - \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{5}{3}\ln|x+1| + C}$$

15.-

$$\int \frac{\boldsymbol{3x}}{\boldsymbol{x^2+2x+3}}\boldsymbol{dx}$$

Éste parecería que no necesita realizar operaciones demasiado complejas… pero… putada, el denominador tiene raíces imaginarias.

Empecemos a trabajar sobre la expresión. El numerador ofrece una oportunidad para resolver el problema de manera logarítmica. Explorémosla:

$$\int \frac{3x}{x^2+2x+3}dx$$

$$u = x^2+2x+3 \qquad\qquad du = 2x+2$$

Así:

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx - \frac{3}{2}\int \frac{2}{x^2+2x+3}dx$$

La de la izquierda tiene solución simple (la ponemos en verde para rescatarla después):

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+3| + C$$

Vamos a por la de la derecha que tiene más chicha. La vamos a arrimar a una solución de arcotangente. Para ello completaremos el cuadrado del denominador:

$$-\frac{3}{2}\int \frac{2}{x^2+2x+3}dx = -3\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$$

$$= -3\int \frac{1}{(x+1)^2+2}dx$$

Preparemos el denominador:

$$= -3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{2}+1}dx = \frac{-3}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx$$

Vamos a por ello ahora:

$$u = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad du = \frac{1}{\sqrt{2}}dx$$

$$= \frac{-3\cdot\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx \rightarrow$$

$$= \frac{-3\cdot\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{(u)^2+1} \rightarrow$$

$$= \frac{-3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \arctan u + C$$

Es decir, el resultado final es:

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}\ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C}$$

16.-

$$\int \frac{\boldsymbol{6x+10}}{\boldsymbol{-x^3+x^2+x-1}}\boldsymbol{dx}$$

Vamos a tener que extraer las raíces del polinomio de abajo por Ruffini. Veamos si son reales o no:

Recordemos que tenemos que llegar a '0' y además las propuestas son siempre múltiplos del independiente. Es decir, en nuestro caso, las propuestas sólo pueden ser -1 y +1

raíces	x^3	x^2	x	indep
	-1	1	1	-1
+1		-1	0	+1
	-1	0	1	0
-1		1	-1	
	-1	1	0	
+1		-1		
	-1	0		

Tiene tres raíces reales. Es decir podemos factorizar como:

$$-x^3+x^2+x-1 = (x-1)(x+1)(x-1)$$

Ojo, al multiplicar estos factores me da, justamente, lo contrario, lo mismo pero con el signo cambiado… (ello es debido a que el coeficiente de la primera x es (-1)…)opto por seguir normalmente y cambiar el signo al final del todo:

Es decir (ojo a este paso):

$$(x+1)(x-1)^2$$

Así:

$$\frac{6x+10}{-x^3+x^2+x-1} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Seguimos:

$$\frac{6x+10}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{(x+1)}(x+1)(x-1)^2 + \frac{B}{(x-1)}(x+1)(x-1)^2 + \frac{C}{(x-1)^2}(x+1)(x-1)^2$$

$$6x + 10 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$$

Vamos a desplegar:

$$6x + 10 = (Ax^2 + A - 2Ax) + (Bx^2 - B) + (Cx + C)$$

x = 1:

$$6 \cdot 1 + 10 = (A \cdot 1^2 + A - 2A \cdot 1) + (B \cdot 1^2 - B) + (C \cdot 1 + C)$$

$$16 = 2C \rightarrow C = 8$$

x = -1:

$$6 \cdot -1 + 10 = (A \cdot -1^2 + A - 2A \cdot -1) + (B \cdot -1^2 - B) + (C \cdot -1 + C)$$

$$4 = (4A) + (0) + (0) \rightarrow A = 1$$

x = 2:

$$6 \cdot 2 + 10 = (A \cdot 2^2 + A - 2A \cdot 2) + (B \cdot 2^2 - B) + (C \cdot 2 + C)$$

Sustituyamos por lo que sabemos:

$$22 = (4 + 1 - 4) + (B \cdot 4 - B) + (8 \cdot 2 + 8)$$

$$22 = (1) + (3B) + (24)$$

$$-3 = 3B \rightarrow B = -1$$

Sustituyamos ahora:

$$\frac{1}{(x+1)} + \frac{-1}{(x-1)} + \frac{8}{(x-1)^2}$$

Es decir:

$$\int \frac{6x+10}{-x^3 + x^2 + x - 1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x-1)} + \frac{8}{(x-1)^2}\,dx \rightarrow$$

$$= \int \frac{1}{(x+1)}\,dx - \int \frac{1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{8}{(x-1)^2}\,dx =$$

Las dos primeras son directas logarítmicas. Las dejamos para el final. La última es por u-sustitución:

$$8\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$u = (x-1) \qquad du = dx$$

Luego:

$$8\int u^{-2}\,du = \frac{-8}{u} + C$$

Resultado final:

$$\ln|x+1| - \ln|x-1| - \left(\frac{8}{x-1}\right) + C$$

Cambiemos el signo (por lo que vimos al principio de que estábamos antes $-x^3$ …):

$$\boldsymbol{\ln|x-1| - \ln|x+1| + \left(\frac{8}{x-1}\right) + C}$$

17.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2-1}}{\boldsymbol{x(x^2+1)}}\boldsymbol{dx}$$

Vamos a probar a ver si podemos dirigirla a una solución logarítmica:

$$\int \frac{x^2-1}{x^3+x}dx$$

$$u = x^3 + x \qquad\qquad du = 3x^2 + 1$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{3x^2-3+4-4}{x^3+x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+1-4}{x^3+x}dx \rightarrow$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}dx - \frac{1}{3}\int \frac{4}{x^3+x}dx \rightarrow$$

La primera tiene una simple solución logarítmica… pero la segunda…ojo, no la podemos dirigir hacia una solución de arcotangente, pues tenemos un denominador al cubo… esta estrategia no es apropiada….

Desarrollemos las raíces del polinomio cúbico del denominador. Hagamos Ruffini… tampoco podemos… no hay término independiente….

Bueno, pues vamos a considerar las raíces del polinomio cuadrático:… todo está en contra. Pero también para eso tenemos trucos. Estamos ya ante un polinomio irreducible, luego:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \rightarrow$$

$$x^2 - 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$$

$$x^2 - 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

Propongamos, x = 0:

$$0^2 - 1 = A \cdot 0^2 + A + B \cdot 0^2 + C \cdot 0$$

$$A = -1$$

Propongamos x = 1

$$x^2 - 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$1^2 - 1 = (-1)1^2 + (-1) + B \cdot 1^2 + C \cdot 1$$

$$0 = (-1)1^2 + (-1) + B \cdot 1^2 + C \cdot 1$$

$$2 = B + C \rightarrow C = 2 - B$$

Propongamos x = 2

$$2^2 - 1 = (-1) \cdot 2^2 + (-1) + B \cdot 2^2 + C \cdot 2$$

$$3 = -5 + 4B + 2C$$

$$8 = 4B + 2(2 - B) \rightarrow 8 = 4B + 4 - 2B$$

$$4 = 2B \rightarrow B = 2$$

$$C = 2 - B = 2 - 2 = 0 \rightarrow C = 0$$

Sustituyamos:

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2x + 0}{x^2 + 1}$$

Es decir:

$$\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} dx = \int \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x} dx \rightarrow$$

La segunda es logarítmica directa:$-\ln|x|$

La primera también es logarítmica directa:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

$$u = x^2 + 1 \qquad du = 2xdx$$

$$= \ln|x^2 + 1|$$

El resultado final:

$$\mathbf{\ln|x^2 + 1| - \ln|x|}$$

18.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x+2}}{\boldsymbol{x^3-4x^2+4x}}\boldsymbol{dx}$$

Reescribamos la expresión:

$$\int \frac{x+2}{x(x^2-4x+4)}dx$$

Veamos las raíces del polinomio del denominador:

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$$

Es decir, dos raíces en 2.

$$x(x-2)(x-2) \rightarrow x(x-2)^2$$

Entonces podemos escribir (recordemos que hay que 'desplegar' los factores):

$$\frac{x+2}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2} \rightarrow$$

Hacemos factor común para poder igualar los numeradores:

$$x+2 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

Supongamos x = 2:

$$x+2 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

$$2+2 = A(2-2)^2 + B2(2-2) + C \cdot 2$$

$$4 = A(0)^2 + B(0) + 2C \rightarrow C = \frac{4}{2}$$

$$C = 2$$

Supongamos x = 0:

$$x+2 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

$$0+2 = A(0-2)^2 + B0(0-2) + 2 \cdot 0$$

$$2 = 4A \rightarrow A = 1/2$$

Supongamos x = 1:

$$x+2 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

$$1+2 = \frac{1}{2}(1-2)^2 + B1(1-2) + 2 \cdot 1$$

$$3 = \frac{1}{2}(-1)^2 + B1(-1) + 2 \cdot 1$$

$$3 = \frac{1}{2} - B + 2 \rightarrow 1 = \frac{1}{2} - B \rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Ahora sustituimos:

$$\int \frac{x+2}{x(x^2-4x+4)}dx = \int \frac{1/2}{x} - \frac{-1/2}{(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2}dx$$

Las dos primeras son directamente integrables:

$$\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-2|$$

Vamos a por el término tercer, que es el rollo:

$$\int \frac{2}{(x-2)^2}dx$$

$$u = x-2 \qquad\qquad du = dx$$

$$2\int u^{-2}\,du = 2\frac{-1}{u} + C$$

Resultado final:

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C}$$

19.-

$$\int \boldsymbol{\frac{3x^3+6x^2+4x-24}{x^4+4x^3+8x^2}dx}$$

Podemos factorizar el denominador del integrando del siguiente modo:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 = x^2(x^2+4x+8)$$

Observamos que el polinomio cuadrático no tiene raíces reales así que presentamos la expresión de este modo:

$$\frac{3x^3+6x^2+4x-24}{x^2(x^2+4x+8)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+8}$$

Hagamos factor común y, obviamente, podremos igualar numeradores:

$$3x^3+6x^2+4x-24 = Ax(x^2+4x+8) + B(x^2+4x+8) + Cx^3 + Dx^2$$

Empecemos a 'generar' ecuaciones para despejar las incógnitas. x = 0:

$$3(0)^3 + 6(0)^2 + 4(0) - 24 = A(0)((0)^2 + 4(0) + 8) + B((0)^2 + 4(0) + 8) + C(0)^3 + D(0)^2$$

$$-24 = B8 \rightarrow B = -3$$

x = 1:

$$3(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) - 24 = A(1)((1)^2 + 4(1) + 8) + B((1)^2 + 4(1) + 8) + C(1)^3 + D(1)^2$$

$$28 = 13A + C + D$$

x = -1:

$$3(-1)^3 + 6(-1)^2 + 4(-1) - 24 = A(-1)((-1)^2 + 4(-1) + 8) + B((-1)^2 + 4(-1) + 8) + C(-1)^3 + D(-1)^2$$

$$-10 = -5A - C + D$$

x = 2:

$$3(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) - 24 = A(2)((2)^2 + 4(2) + 8) + B((2)^2 + 4(2) + 8) + C(2)^3 + D(2)^2$$

$$92 = 40A + 8C + 4D$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones:

$$28 - 13A - C = D$$

$$-10 = -5A - C + 28 - 13A - C \rightarrow C = \frac{18A - 38}{-2} = \frac{38 - 18A}{2}$$

$$92 = 40A + 8\left(\frac{38 - 18A}{2}\right) + 4\left(28 - 13A - \left(\frac{38 - 18A}{2}\right)\right)$$

$$92 = 40A + 152 - 72A + 112 - 152A - 76 + 36A$$

$$-96 = -48A \rightarrow A = 2$$

Entonces:

$$C = 1 \qquad \& \qquad D = 1$$

Ahora sustituimos:

$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 + 4x - 24}{x^4 + 4x^3 + 8x^2} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 8} dx \rightarrow \int \frac{2}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{1x + 1}{x^2 + 4x + 8} dx$$

Esto se puede descomponer en una suma de integrales de la que, los dos primeros términos tienen derivación directa:

$$\int \frac{2}{x} + \frac{-3}{x^2} dx \rightarrow 2\ln|x| + \frac{3}{x}$$

Vamos a seguir con la integral de la derecha, que es la que tiene más dificultad:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+8}dx$$

Podemos acercarla a una solución logarítmica. Hagamos u-sustitución:

$$u = x^2+4x+8 \qquad\qquad du = 2x+4$$

Podemos 'preparar' el integrando:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2+(2-2)}{x^2+4x+8}dx \rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+8}dx$$

Que podemos volver a separar en dos integrales diferentes. La de la izquierda, que tiene solución logarítmica, y la de la derecha, que tiene solución arcotangente.

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+4x+8}dx$$

Vamos con la primera (la que responde a la u sustitución que hemos hecho):

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx \rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \rightarrow \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8|$$

Vamos ahora con la segunda (vamos a por una solución de tipo arcotangente):

$$-\frac{2}{2}\int \frac{1}{x^2+4x+8}dx$$

Completemos el cuadrado del denominador:

$$-\int \frac{1}{(x+2)^2+4}dx$$

Buscamos 'algo al cuadrado + 1'):

$$-\frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{4}{4}}dx \rightarrow -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}dx$$

Ya lo tenemos, hacemos u sustitución:

$$u = \frac{x+2}{2} \qquad\qquad du = \frac{1}{2}dx$$

'Preparamos el integrando':

$$-\frac{2}{4}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}dx \rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{du}{(u)^2+1} = -\frac{1}{2}\arctan u + C$$

Es decir, el resultado final es:

$$\mathbf{2\ln|x| + \frac{3}{x} + \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + C}$$

20.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2 - x + 1}}{\boldsymbol{x^3 + x}} \boldsymbol{dx}$$

Es fácil ver que el polinomio del denominador tiene algunas soluciones imaginarias:

$$x^3 + x = x(x^2 + 1)$$

, pues, obviamente, $x^2 + 1$ no tiene soluciones reales. Así que factorizamos del siguiente modo:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)} dx$$

Trabajemos sobre el integrando:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)}$$

Hagamos factor común e igualemos los numeradores:

$$x^2 - x + 1 = A(x^2 + 1) + x(Bx + C)$$

$$x^2 - x + 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

Despejemos las incógnitas. x = 0:

$$(0)^2 - (0) + 1 = A(0)^2 + A + B(0)^2 + C(0)$$

$$A = 1$$

x = 1:

$$(1)^2 - (1) + 1 = A(1)^2 + A + B(1)^2 + C(1)$$

$$1 = 1 + 1 + B + C$$

$$-1 = B + C \rightarrow B = -1 - C$$

x = -1:

$$(-1)^2 - (-1) + 1 = 1(-1)^2 + 1 + B(-1)^2 + C(-1)$$

$$1 - (-1) + 1 = 1 + 1 + B - C \rightarrow 1 = B - C$$

$$1 = -1 - C - C \rightarrow 2 = -2C \rightarrow C = -1$$

Por lo que:

$$B = 0$$

Ahora sustituimos:

$$\int \frac{1}{x} + \frac{0x-1}{(x^2+1)}dx \rightarrow \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{(x^2+1)}dx$$

Ambos términos tienen derivación directa:

$$\boldsymbol{\ln|x| - \arctan x + C}$$

21.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2-2}}{\boldsymbol{x^3-3x+2}}\boldsymbol{dx}$$

No podemos factorizar (pues nos queda un '2' libre)… Extraigamos las raíces por Ruffini:

raíces	x^3	x^2	x	indep
	1	0	-3	2
+1		1	1	-2
	1	1	-2	0
+1		1	2	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

Ya tenemos las raíces:

$$(x-1)(x-1)(x+2) \rightarrow (x+2)(x-1)^2$$

Ahora podemos reescribir el polinomio del interior de la integral (IMPORTANTE: recordemos 'desplegar' las raíces en todos sus exponentes):

$$\frac{x^2-2}{x^3-3x+2} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Hagamos factor común a la derecha e igualemos numeradores:

$$x^2 - 2 = A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)$$

Y ahora despejemos las incógnitas. x = 1:

$$(1)^2 - 2 = A((1)-1)^2 + B((1)+2)((1)-1) + C((1)+2)$$

$$-1 = 0 + 0 + 3C \rightarrow C = -\frac{1}{3}$$

x = -2:

$$(-2)^2 - 2 = A((-2)-1)^2 + B((-2)+2)((-2)-1) + C((-2)+2)$$

$$2 = 9A \rightarrow A = \frac{2}{9}$$

x = 0:

$$(0)^2 - 2 = A((0) - 1)^2 + B((0) + 2)((0) - 1) + C((0) + 2)$$

$$-2 = A - 2B + 2C \rightarrow -2 = A - 2B + 2C$$

$$-2 = \frac{2}{9} - 2B - \frac{2}{3} \rightarrow 2B = \frac{2}{9} - \frac{2}{3} + 2 \rightarrow B = \frac{7}{9}$$

Ahora podemos sustituir:

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 3x + 2} dx = \int \frac{A}{(x + 2)} + \frac{B}{(x - 1)} + \frac{C}{(x - 1)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2}{9} \int \frac{1}{(x + 2)} dx + \frac{7}{9} \int \frac{1}{(x - 1)} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx \rightarrow$$

Las dos primeras tienen antiderivada directa. La segunda casi. Vamos a por la segunda:

$$u = x - 1 \qquad\qquad du = dx$$

$$\int \frac{du}{u^2} \rightarrow \int u^{-2}\, du \rightarrow \frac{-1}{u} + C$$

Luego el resultado final es:

$$\boldsymbol{\frac{2}{9} \ln |x + 2| + \frac{7}{9} \ln |x - 1| + \frac{1}{3(x - 1)} + C}$$

22.-

$$\boldsymbol{\int (x^2 + 2x + 1) \ln x \, dx}$$

Esta se aborda mediante la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = \ln x} \qquad\qquad du = \frac{1}{x} dx$$

$$w = \frac{x^3}{3} + x^2 + x \qquad\qquad \boldsymbol{dw = (x^2 + 2x + 1) dx}$$

De donde, por la regla de la integración por partes:

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right) lnx - \int \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right) \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right) lnx - \int \frac{x^2}{3} + x + 1 \, dx =$$

$$= \boldsymbol{\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right) lnx - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} - x + C}$$

23.-

$$\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x\, dx$$

Usemos la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = \cos 2x} \qquad du = -2sen2x\, dx$$

$$w = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x \qquad \boldsymbol{dw = (x^2 + 7x - 5)dx}$$

$$= (\cos 2x)\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x - \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x\right)(-2sen\, 2x)dx$$

Volvemos a aplicar la regla de la integración por partes:

$$= (\cos 2x)\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x + 2\int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x\right)(sen\, 2x)dx$$

Ojo… este tipo de sustitución nos va a prorrogar el problema al infinito, pues siempre vamos a estar ante la integral de un polinomio de grado superior al que previo. Mejor cambiar la estrategia y redefinir la primera elección de 'u'. Hemos dejado la estrategia anterior para que seamos conscientes de la importancia de elegir bien la 'u'.

$$\boldsymbol{u = (x^2 + 7x - 5)} \qquad du = 2x + 7$$

$$\boldsymbol{dw = cos\, 2x\, dx}$$

Para extraer 'w' tendremos que hacer u sustitución, para no confundirnos con las letras, usaremos 'r':

$$\int \cos 2x\, dx \to r = 2x \qquad dr = 2\, dx$$

$$\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx \to \frac{1}{2}\int \cos(r)\, dr \to \frac{1}{2}\sin 2x\, dx$$

Es decir:

$$\boldsymbol{u = (x^2 + 7x - 5)} \qquad du = 2x + 7dx$$

$$w = \frac{1}{2}\sin 2x\, dx \qquad \boldsymbol{dw = cos\, 2x\, dx}$$

Ahora usamos la regla de la integración por partes:

$$(x^2 + 7x - 5)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\, dx\right) - \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)(2x + 7)dx$$

Como vemos, mediante esta estrategia estamos reduciendo cada vez más el grado del polinomio hasta que podamos sacarlo del integrando y, así, tener una integral trigonométrica directa. Vamos dejando en verde lo resuelto y seguimos sólo con la parte en negro:

$$-\int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)(2x+7)dx$$

$$\boldsymbol{u = 2x + 7} \qquad\qquad du = 2dx$$

$$\boldsymbol{dw = \frac{1}{2}\sin 2x}$$

Para extraer 'w' tenemos que hacer, de nuevo, 'r' sustitución:

$$\int \frac{1}{2}\sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx$$

$$r = 2x \qquad\qquad dr = 2\, dx$$

Preparemos el integrando:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\sin 2x\, dx \to \frac{1}{4}\int \sin r\, dr \to \frac{1}{4}(-\cos(r))$$

Es decir, estamos ante:

$$\boldsymbol{u = 2x + 7} \qquad\qquad du = 2dx$$

$$w = -\frac{1}{4}\cos 2x \qquad\qquad \boldsymbol{dw = \frac{1}{2}\sin 2x}$$

Así que tenemos:

$$(x^2+7x-5)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\, dx\right) - \left[(2x+7)\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)2dx\right]$$

Que podemos ir fijando como:

$$(x^2+7x-5)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\, dx\right) + (2x+7)\left(\frac{1}{4}\cos 2x\right) - \int \left(\frac{1}{4}\cos 2x\right)2dx$$

Vamos a por el último término:

$$\frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$r = 2x \qquad\qquad dr = 2dx$$

Es decir, si preparamos el integrando:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x\, 2dx \to \frac{1}{4}\int \cos r\, dr \to \frac{1}{4}\sin r + C$$

Luego, el resultado final es:

$$\boldsymbol{\left(x^2+7x-5\right)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\, dx\right) + (2x+7)\left(\frac{1}{4}\cos 2x\right) - \frac{1}{4}\sin 2x + C}$$

24.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{5-x^6}}\boldsymbol{dx}$$

Vamos a acercarla en la medida de lo posible a una solución logarítmica. Busquemos una 'u' cuya derivada se acerque a algo al cuadrado. Por ejemplo:

$$u = x^3 \qquad\qquad du = 3x^2dx$$

Así:

$$\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{5-x^6}dx \rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{du}{5-u^2}$$

Vamos a buscar una de tipo arcotangente (hacemos '*cambio'* de signo):

$$-\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+5}$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\int \frac{du}{\frac{u^2}{5}+1} \rightarrow -\frac{1}{15}\int \frac{du}{\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)^2+1}$$

Hagamos w sustitución:

$$w = \frac{u}{\sqrt{5}} \qquad\qquad dw = \frac{1}{\sqrt{5}}dx$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{15}\int \frac{dw}{(w)^2+1} \rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot 3}\arctan w + C$$

$$\frac{-1}{\sqrt{5}\cdot 3}\arctan\frac{u}{\sqrt{5}} + C$$

Habría que volver a cambiarle el signo (recordemos que lo cambiamos en '*cambio'*).

$$\frac{1}{\sqrt{5}\cdot 3}\arctan\frac{x^3}{\sqrt{5}} + C$$

Ojo, aquí hay algo que no cuadra….

Existe una regla de integración directa para casos como el que teníamos en pasos anteriores:

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) + C$$

Así:

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{5-u^2}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\int\frac{du}{1-\frac{u^2}{5}}\rightarrow\frac{1}{5\cdot 3}\int\frac{du}{1-\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$w=\frac{u}{\sqrt{5}}\qquad\qquad dw=\frac{1}{\sqrt{5}}dx$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5\cdot 3\cdot}\int\frac{dw}{1-(w)^2}=$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot 3}(\ln(1+w)-\ln(1-w))=$$

$$\frac{1}{6\sqrt{5}}\left(\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{5}}\right)-\ln\left(1-\frac{u}{\sqrt{5}}\right)\right)\rightarrow\boldsymbol{\frac{1}{6\sqrt{5}}\left(\ln\left(1+\frac{x^3}{\sqrt{5}}\right)-\ln\left(1-\frac{x^3}{\sqrt{5}}\right)\right)+C}$$

25.-

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x\,dx$$

Integración por partes:

$$u=\sin x\qquad\qquad du=\cos x\,dx$$

$$\int\sqrt{u}\,du=\int u^{1/2}\,du=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C\rightarrow\boldsymbol{\frac{2\sqrt[2]{\sin^3 x}}{3}+C}$$

26.-

$$\int\boldsymbol{\frac{\ln^3 x}{x}\,dx}$$

$$u=\ln x\qquad\qquad du=\frac{1}{x}dx$$

Luego:

$$\int u^3\,du\rightarrow\frac{u^4}{4}+C\rightarrow\boldsymbol{\frac{\ln^4 x}{4}+C}$$

27.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{1+x^2}}\boldsymbol{dx}$$

$$u = 1 + x^2 \qquad\qquad du = 2x\,dx$$

Preparemos el integrando:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \rightarrow \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C}$$

28.-

$$\int \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{1+x^4}}\boldsymbol{dx}$$

$$u = x^2 \qquad\qquad du = 2x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^4}dx \rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}$$

Es de tipo arcotangente:

$$\frac{1}{2}\arctan u + C \rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{2}\arctan(x^2) + C}$$

29.-

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{a^2+x^2}}$$

Nota: obviamente 'a' es una constante.

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$u = \frac{x}{a} \qquad\qquad du = \frac{1}{a}dx$$

$$\frac{a}{a^2}\int \frac{\frac{1}{a}du}{1+(u)^2} \rightarrow \frac{1}{a}\arctan u + C$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

30.-

$$\int \arctan x \, dx$$

$$\boldsymbol{u = \arctan x} \qquad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$w = x \qquad \boldsymbol{dw = dx}$$

$$x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$\boldsymbol{x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C}$$

31.-

$$\int \boldsymbol{x \ln x \, dx}$$

$$\boldsymbol{u = x} \qquad du = dx$$

$$w = xlnx - x \qquad \boldsymbol{dw = \ln x \, dx}$$

$$\int x \ln x \, dx = x(xln\, x - x) - \int (xlnx - x)\, dx$$

$$\int x \ln x \, dx = x(xln\, x - x) - \int x \ln x \, dx + \int x \, dx$$

$$2\int x \ln x \, dx = x(xln\, x - x) + \frac{x^2}{2} + C \rightarrow$$

$$\frac{(x^2 ln\, x - x^2)}{2} + \frac{x^2}{4} + C \rightarrow \boldsymbol{\frac{x^2 ln\, x}{2} - \frac{x^2}{4} + C}$$

32.-

$$\int \boldsymbol{x^2 \sin 2x \, dx}$$

$$\boldsymbol{u = x^2} \qquad du = 2x\, dx$$

$$\boldsymbol{dw = \sin 2x \, dx}$$

$$r = 2x \qquad dr = 2\, dx$$

$$\frac{1}{2}\int \sin r \, dr \rightarrow -\cos r \rightarrow -\frac{1}{2}\cos 2x$$

Luego, lo que tenemos es:

$$\boldsymbol{u = x^2} \qquad\qquad du = 2x\,dx$$

$$w = -\frac{1}{2}\cos 2x \qquad\qquad \boldsymbol{dw = \sin 2x\,dx}$$

$$x^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\, 2x\, dx =$$

$$+\int \cos 2x\, x\, dx =$$

Ojo con no caer aquí en la trampa/bucle de la u sustitución. A nada que pensemos veremos que hay que elegir del siguiente modo ('intentando agotar el exponente de la x'):

$$\boldsymbol{u = x} \qquad\qquad du = dx$$

$$\boldsymbol{dw = \cos 2x}$$

$$r = 2x \qquad dr = 2\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \cos r\, dr \rightarrow \sin r \rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x$$

Es decir:

$$\boldsymbol{u = x} \qquad\qquad du = dx$$

$$w = \frac{1}{2}\sin 2x \qquad\qquad \boldsymbol{dw = \cos 2x}$$

$$x\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x$$

$$r = 2x \qquad dr = 2\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \sin r\, dr \rightarrow -\cos r \rightarrow -\frac{1}{2}\cos 2x$$

Resultado final:

$$\boldsymbol{x^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + x\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C}$$

33.-

$$\int \mathbf{5x^4 \sin\left(x^5+3\right)\, dx}$$

$$u = x^5 + 3 \qquad\qquad du = 5x^4$$

$$\int \sin(u)\, du \rightarrow -\cos(u) + C \rightarrow \mathbf{-\cos\left(x^5+3\right) + C}$$

34.-

$$\int \mathbf{6e^{3x} \sin(e^{3x})\, dx}$$

$$u = e^{3x} \qquad\qquad du = 3e^{3x}$$

$$2\int \frac{1}{2} \cdot 6\, e^{3x} \sin(e^{3x})\, dx \rightarrow 2\int \sin(u)\, du \rightarrow \mathbf{-2\cos e^{3x} + C}$$

35.-

$$\int \mathbf{\frac{\cos(\ln(x))}{x}\, dx}$$

$$u = \ln(x) \qquad\qquad du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \cos(u)\, du \rightarrow \sin(u) + C \rightarrow \mathbf{\sin(\ln(x)) + C}$$

36.-

$$\int \mathbf{\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\, dx}$$

$$u = x^3 + 1 \qquad\qquad du = 3x^2$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx \rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} \rightarrow \frac{1}{3}\int u^{-1/2}\, du$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C \rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{u} + C \rightarrow \mathbf{\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C}$$

37.-

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

Ésta, a nada que se piense, vemos que es directa:

$$\boldsymbol{-\csc x + C}$$

38.-

$$\boldsymbol{\int a^x \, dx \rightarrow \frac{a^x}{\ln a} + C}$$

39.-

$$\boldsymbol{\int \frac{2x^2 - 4x + 1}{x(x^2 - 2x + 1)} dx}$$

El polinomio cuadrado del denominador tiene dos raíces reales iguales:

$$\rightarrow x^2 - 2x + 1 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1 \; (dos \; veces)$$

Es decir, se puede factorizar como: $x \cdot (x-1)^2$

Ahora recordemos 'desplegar' todos los exponentes:

$$\frac{2x^2 - 4x + 1}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Hacemos factor común a la derecha e igualamos numeradores:

$$2x^2 - 4x + 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

Despejemos las incógnitas. x = 1:

$$2(1)^2 - 4(1) + 1 = A\big((1)-1\big)^2 + B(1)\big((1)-1\big) + C(1)$$

$$C = -1$$

x = 0:

$$2(0)^2 - 4(0) + 1 = A\big((0)-1\big)^2 + B(0)\big((0)-1\big) + C(0)$$

$$1 = A$$

x = -1:

$$2(-1)^2 - 4(-1) + 1 = (1)\big((-1) - 1\big)^2 + B(-1)\big((-1) - 1\big) + (-1)(-1)$$

$$2 + 4 + 1 = 4 + 2B + 1 \rightarrow 2 = 2B \rightarrow B = 1$$

Ahora sustituimos:

$$\int \frac{2x^2 - 4x + 1}{x(x^2 - 2x + 1)}\,dx = \int \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

Podemos ir quitándonos algunas partes:

$$\ln|x| + \ln|x-1| - \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$u = x - 2 \qquad\qquad du = dx$$

$$\int \frac{du}{(u)^2} = \int u^{-2}\,du = \frac{u^{-1}}{-1} = \frac{-1}{u} + C$$

Resultado final:

$$\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{-1}{u} + C$$

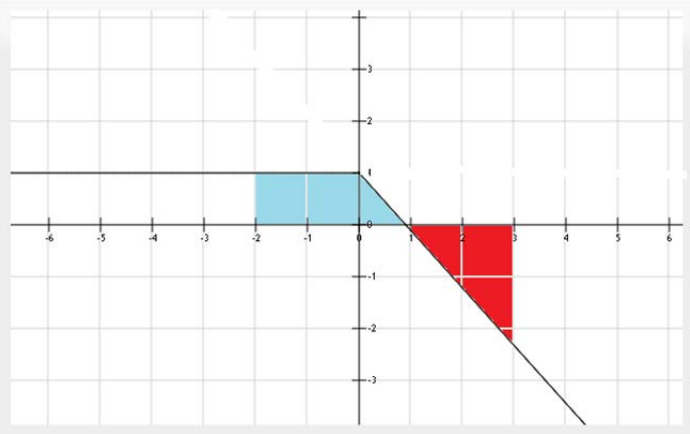
$$\boldsymbol{\ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C}$$

40.- Dada la función f(x) definida en el intervalo [-2,3] de la forma:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1\ si\ -2 \le x \le 0 \\ ax + 1\ si\ 0 < x \le 3 \end{cases}}$$

Determinar el valor de 'a' para que l integral de f(x) en [-2,3] sea igual a 0.

El escenario aproximado ante el que estamos es como el siguiente esquema:



Sabemos que el área total debe ser = 0. La parte positiva debe ser igual a la parte negativa (en rojo). Es decir, también podemos plantearlo como que la parte de la izquierda del eje de la 'y'

(el rectángulo azul) y la parte de la derecha (la suma de lo azul y la resta de lo rojo) debe ser 0, así:

$$\int_{-2}^{0} 1\,dx + \int_{0}^{3} ax + 1\,dx = 0$$

Más fácil imposible:

$$[x]|_{-2}^{0} + \left[\frac{ax^2}{2} + x\right]\Big|_{0}^{3} = 0$$

$$[0 - -2] + \left[\frac{a3^2}{2} + 3 - \left(\frac{a0^2}{2} + 0\right)\right] = 0$$

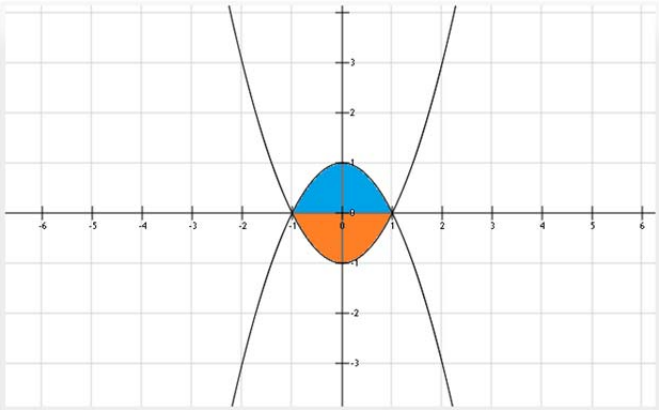
$$2 + \frac{9a}{2} + 3 = 0 \rightarrow \boldsymbol{a = \frac{-10}{9}}$$

41.- Hallar el área del recinto del plano limitado por las gráficas de las funciones siguientes:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 1}$$

$$\boldsymbol{g(x) = -x^2 + 1}$$

Es fácil ver que el escenario es:



Y que, puesto que es simétrica respecto al eje de abscisas ('x'), podemos calcular el área azul desde [-1,1] y multiplicarla por dos. El problema es muy simple (ojo, es de análisis matemático de primero de ingeniería informática).

Realmente, lo primero que habría que calcular son los puntos de corte entre ambas funciones:

$$x^2 - 1 = -x^2 + 1$$

$$2x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{2}} = \pm 1$$

Sustituimos en cada función y, así, averiguamos que los puntos están son el eje de abscisas, por lo que se confirma la aproximación gráfica que supusimos al principio. Ahora, sí, calculemos el área azul y (dada la simetría), multipliquemos por dos:

$$2\int_{1}^{-1} -x^2+1 = 2\left[\frac{-x^3}{3}+x\right]\Bigg|_{-1}^{1} \rightarrow$$

$$2\left(\frac{-1^3}{3}+1\right)-2\left(\frac{-(-1)^3}{3}+(-1)\right)=\mathbf{\frac{8}{3}\ u^2}$$

42.- Halla una primitiva F(x) de la función $f(x)=8x^3+2x$, que cumpla que F(x)≥ 0 para todo $x \in R$, y de forma que el área comprendida entre la gráfica de F(x), el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 1 sea 41/15:

La primitiva de $f(x)=8x^3+2x$ es:

$$F(x)=\int 8x^3+2x\ dx \rightarrow \frac{8x^4}{4}+x^2+C \rightarrow 2x^4+x^2+C$$

La función no puede adoptar valores negativos pues los exponentes de las variables son pares. El valor mínimo absoluto que puede adoptar es = 0, por lo que no hay que hacer nada con la constante para que la función primitiva cumpla ser ≥ 0.

Ahora, para que el área, recordemos, de F(x) sea como nos solicitan, sencillamente:

$$\int_0^1 2x^4+x^2\,dx=\frac{41}{15}\ u^2$$

$$\frac{2x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+C\Big|_0^1=\frac{41}{15}\ u^2$$

$$\frac{2(1)^5}{5}+\frac{(1)^3}{3}-0+C=\frac{41}{15}\ u^2 \rightarrow \frac{11}{15}+C=\frac{41}{15} \rightarrow C=\frac{41}{15}-\frac{11}{15} \rightarrow C=\frac{30}{15}$$

Luego F(x) es:

$$\mathbf{2x^4+x^2+\frac{30}{15}}$$

43.- Calcular el área de la región plana limitada por la curva $f(x)=\left|x^2-4x\right|$ y la recta y = 12. Dibujar el recinto.

Lo primero que yo haría es estudiar en qué momento la parábola de la función intenta cruzar el eje de abscisas para 'adentrarse en terreno negativo' (el valor absoluto la hará rebotar):

$$f(x) = |x^2 - 4x| = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

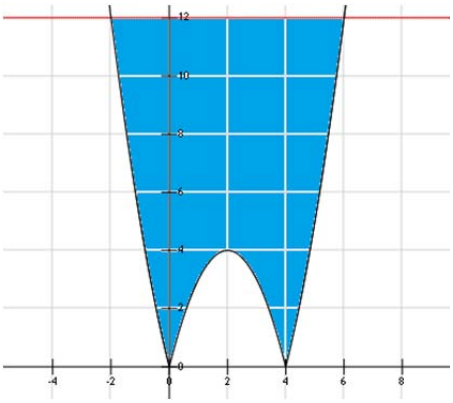
Como es una parábola, nos podemos saltar el cálculo de la concavidad y convexidad. En todo caso, para calcular el 'mínimo' (que estará 'rebotado'):

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

La altura (rebotada) será:

$$f(x) = |x^2 - 4x| \rightarrow |2^2 - 4 \cdot 2| = |-4| = 4$$

La representación gráfica será:



Necesitamos, también conocer los puntos laterales extremos entre los cuales vamos a medir el área. Para ello (aquí no hace falta poner el valor absoluto porque éste sólo afecta a los 'valores verticales'):

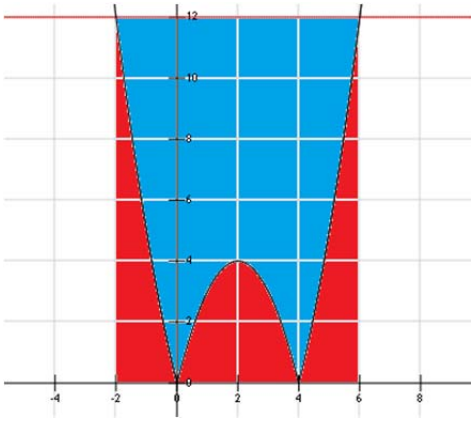
$$x^2 - 4x = 12 \rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ya tenemos los extremos, ahora calculemos el área:

$$\int_{-2}^{6} 12 - |x^2 - 4x| \, dx$$

A la función y = 12 le restamos a otra: Gráficamente (al total bajo 12 le quitamos lo rojo):



Hay que hacerlo por partes (ya no vamos a necesitar las barras de valor absoluto porque al hacerlo por partes, vamos a usar la función ya adaptadas, despejada del valor absoluto):

A:

$$\int_{-2}^{0} 12-(x^2-4x)\ dx$$

$$12x-\frac{x^3}{3}+2x^2\Big|_{-2}^{0} \rightarrow 12(0)-\frac{(0)^3}{3}+2(0)^2-\left(12(-2)-\frac{(-2)^3}{3}+2(-2)^2\right)\rightarrow \frac{40}{3}$$

B (aquí tenemos que usar la parábola 'contraria'):

$$\int_{0}^{4} 12-(-x^2+4x)\ dx \rightarrow \int_{0}^{4} 12+x^2-4x\ dx$$

$$12x+\frac{x^3}{3}-2x^2\Big|_{0}^{4} \rightarrow 12(4)+\frac{(4)^3}{3}-2(4)^2-\left(12(0)+\frac{(0)^3}{3}-2(0)^2\right)\rightarrow \frac{112}{3}$$

C (esto en realidad es como A): $\frac{40}{3}$

$$\int_{4}^{6} 12-(x^2-4x)\ dx$$

$$12x-\frac{x^3}{3}+2x^2\Big|_{-2}^{0} \rightarrow 12(6)-\frac{(6)^3}{3}+2(6)^2-\left(12(4)-\frac{(4)^3}{3}+2(4)^2\right)\rightarrow \frac{40}{3}$$

La suma de todas las áreas (ya sumadas y restadas internamente):

$$\frac{40}{3}+\frac{112}{3}+\frac{40}{3}=\boldsymbol{64\ u^2}$$

<u>44.- Calcular el área de la región plana limitada por la curva $f(x)=\frac{x^2}{4}$ y la recta y = x. Dibujar el recinto.</u>

Lo primero que vamos a hacer es localizar los puntos relevantes para dibujar la gráfica. En primer lugar es fácil ver que sólo corta al eje de abscisas en un punto: en x = 0 , y = 0. (la función se hace 0 cuando el numerador es = 0.

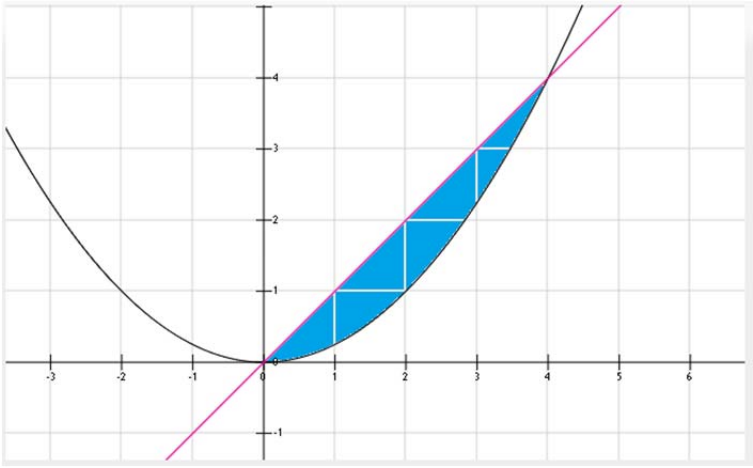
Por otro lado, para conocer los puntos de corte entre las dos funciones (que serán, los límites en los que se realizará la integral) igualaremos las dos funciones:

$$\frac{x^2}{4}=x \rightarrow \frac{x^2}{4}-x=0$$

Las soluciones a esta ecuación de segundo grado son en x = 0 y en x = 4.

Los puntos (x , y) en que se cortan son (0 , 0) y (4 , 4).

Como es una función cuadrática normal y corriente no vamos a estudiar crecimiento ni concavidad. El escenario es el siguiente:



El cálculo del área es lo más simple que s epoda imaginar:

$$\int_0^4 x - \frac{x^2}{4}\,dx \to \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\Big|_0^4 \to \frac{16}{2} - \frac{16\cdot 4}{4\cdot 3} = \mathbf{\frac{8}{3}}\,\boldsymbol{u^2}$$

45.- Calcular el área de la región plana limitada por la curva $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 2x + 3}$ e $\boldsymbol{y = |x+1|}$. Dibujar el recinto.

Calculemos los puntos importantes de la parábola. Observamos que tiene signo negativo, es decir que tiene forma de 'boca triste'.

Los puntos de corte del eje de abscisas:

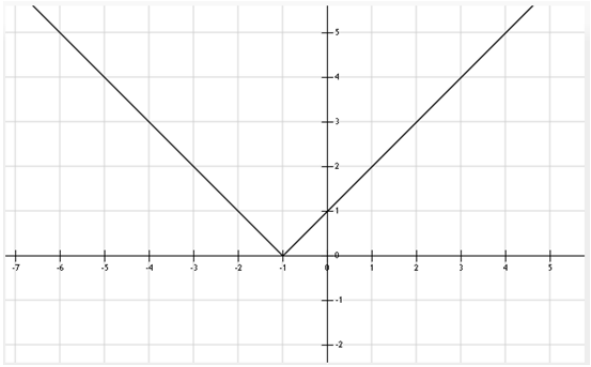
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

¿Cuál es el máximo de la parábola?

Igualamos al derivada a 0:

$$-2x + 2 = 0 \to x = -1 \to (-1,0)$$

Los puntos de corte entre las dos funciones son (ojo al valor absoluto)…sabemos que es así:

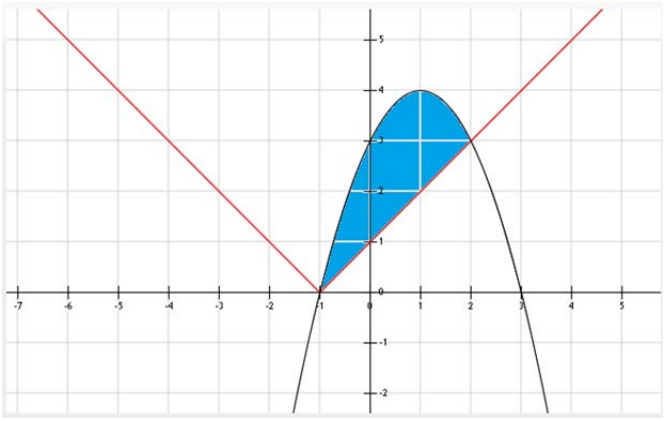


Por la forma de nuestra parábola sabremos que se cortan en:

$$-x^2 + 2x + 3 = x + 1$$

$$-x^2 + x + 2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

El escenario, pues, es el siguiente:



El área es muy simple de calcular. Como es 'hacia la derecha' del punto de corte en -1, podemos quitar las barras de valor absoluto sin problemas. Si fuera a la izquierda de ese punto, tendríamos que quitar las barras de valor absoluto pero invirtiendo el signo del interior. Y si el punto de corte pillara en medio, habría que hacerlo en dos tramos, como cortado por dos líneas diferentes.

Así, 'la de arriba' menos 'la de abajo':

$$\int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 3 - (x + 1)dx$$

$$\int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 3 - x - 1\ dx \rightarrow \int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2\ dx$$

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} \rightarrow$$

$$-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2(2)-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)\right)=$$

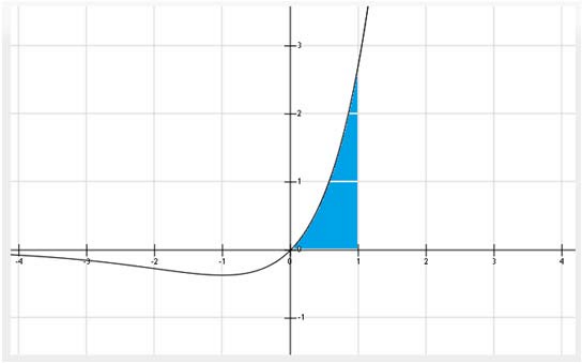
$$-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2=\boldsymbol{\frac{9}{2}u^2}$$

46.- Calcular el área de la región plana limitada por las funciones $\boldsymbol{f(x)=xe^x}$ y las rectas x = 1 e y = 0. Dibujar el recinto para $\boldsymbol{x\geq 0}$.

El dominio es $(-\infty,+\infty)$, y es creciente en el segmento que nos interesa.

Los puntos que nos interesan son aquellos en que la función se hace 0 (pues uno de los límites que se ha establecido es que y = 0). Esto sólo sucede cuando x = 0.

Por otro lado nos aportan otro extremo: justamente cuando x = 1. Así, nos están pidiendo el área bajo la función entre x = 0 y x = 1. El escenario gráfico es el siguiente:



Sencillamente, hay que calcular el área bajo la curva entre x = 0 y x = 1, es decir:

$$\int_0^1 xe^x\,dx$$

Realicemos integración por partes:

$$\boldsymbol{u=x} \qquad du=dx$$

$$w=e^x \qquad \boldsymbol{dw=e^x dx}$$

$$=xe^x-\int e^x\,dx \rightarrow xe^x-e^x \rightarrow xe^x-e^x|_0^1 \rightarrow$$

$$1e^1-e^1-(0e^0-e^0)=\boldsymbol{1\,u^2}$$

47.-

$$\int_e^{e^3}\frac{\ln x}{x}\,dx$$

$$u = \ln x \qquad\qquad du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int_{x=e}^{x=e^3} u\,du \to \frac{u^2}{2}\Big|_{x=e}^{x=e^3} \to \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_{x=e}^{x=e^3} \to$$

$$= \frac{\ln^2 e^3}{2} - \frac{\ln^2 e}{2} \to \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1^2}{2} = \mathbf{4}$$

48.- De la función f de R en R definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, se sabe que tiene un máximo relativo en x = 1 y en un punto de inflexión en (0 , 0), y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d.

- Sobre el máximo relativo, estudiemos su derivada:

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \to 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 0 \to 3a + 2b + c = 0$$

- Sobre el punto de inflexión, estudiemos su derivada segunda:

$$6ax + 2b = 0$$

Y comentan que el punto es (0 , 0), así que x = 0,luego:

$$6a(0) + 2b = 0 \to b = 0$$

Podríamos, ahora, decir que:

$$3a + 2(0) + c = 0 \to c = -3a$$

- Sobre la integral tenemos que:

$$\int_0^1 ax^3 + bx^2 + cx + d = \frac{5}{4} \to$$

$$\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\Big|_0^1 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{a(1)^4}{4} + \frac{0(1)^3}{3} + \frac{c(1)^2}{2} + d(1) - \frac{a(0)^4}{4} + \frac{0(0)^3}{3} + \frac{c(0)^2}{2} + d(0) = \frac{5}{4}$$

$$\frac{a}{4} + \frac{-3a}{2} + d = \frac{5}{4} \to \frac{a}{4} - \frac{6a}{4} + d = \frac{5}{4}$$

$$d = \frac{5 + 5a}{4}$$

Sabemos que, por ejemplo, el punto (0 , 0) es un punto de la función, es decir:

$$a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 0$$

Luego:

$$d = 0$$

Así:

¿Qué ecuaciones tengo?

$$b = 0$$

$$d = \frac{5 + 5a}{4}$$

$$c = -3a$$

$$d = 0$$

Ahora despejamos fácilmente:

$$0 = \frac{5 + 5a}{4} \rightarrow \frac{5a}{4} = \frac{-5}{4} \rightarrow a = -1$$

Y, por lo tanto:

$$c = 3$$

La función que se pedía es:

$$\boldsymbol{-x^3 + 3x}$$

49.- Calcular el área de la intersección entre las funciones:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x^2} \qquad\qquad \boldsymbol{g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}}$$

¿Dónde se cortan?

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{x^2 + 1} \rightarrow \frac{1}{2}x^2(x^2 + 1) - 1 = 0 \rightarrow \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$$

Esta ecuación sólo tiene soluciones reales en x = -1 y x = 1. Es decir, se cortan en los puntos:

$$\left(-1, \frac{1}{2}\right) \qquad \& \qquad \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Datos para la representación gráfica de f(x):

Max o Min: $\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow x$ $\qquad x = 0 \rightarrow Mínimo\ en\ (0,0)$ (sabemos que es min por la forma de la parábola 'sonriente'.

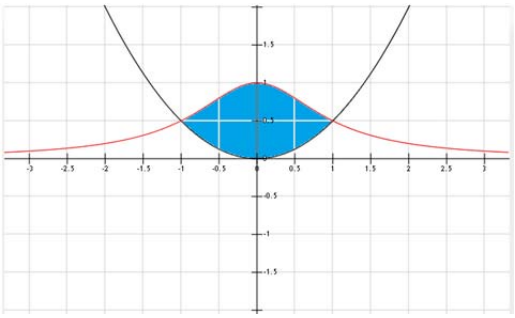
Es una parábola normal y corriente, por lo que no vamos a hacer más por esta función (ya tenemos otros dos puntos de ella que nos sirven para trazarla).

Datos para la representación gráfica de g(x):

Min o Max: $\frac{d}{dx}g(x) = \frac{-2x}{x^4+2x^2+1} = 0 \quad cuando\ x = 0$

Es un máximo pues a ambos lados decrece (como conocemos ya los puntos en que interseccionа con la otra función, no necesitamos más).

Gráficamente el escenario es:



Luego la integral debe ser:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}x^2 dx \rightarrow$$

$$\arctan(1) - \frac{(1)^3}{6} - \arctan(-1) + \frac{(-1)^3}{6} = \mathbf{1,24\ u^2}$$

50.- Calcular el área de la intersección entre las funciones:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{x^2}} \qquad\qquad \boldsymbol{g(x) = 5 - x^2}$$

¿Dónde interseccionan?

$$\frac{4}{x^2} = 5 - x^2 \rightarrow 4 = 5x^2 - x^4$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

¿Cuáles son las raíces de esta ecuación?

raíces	x^4	x^3	x^2	x	indep
	1	0	-5	0	4
+1		1	1	-4	-4
	1	1	-4	-4	0
-1		-1	0	4	
	1	0	-4	0	
+2		2	4		
	1	2	0		
-2		-2			
	1	0			

Es decir, se cortan en los puntos:

$$(1,4)\ (-1,4)\quad (2,1)\quad (-2,1)$$

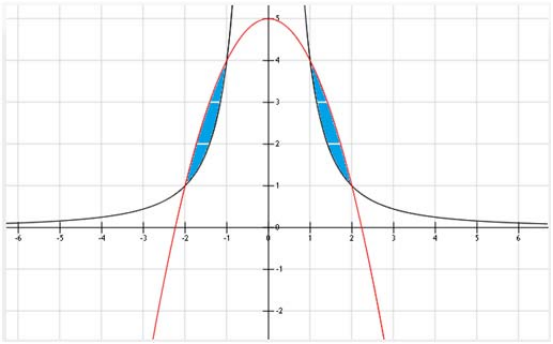
Estudiemos las gráficas.

$$f(x) = \frac{4}{x^2}$$

A primera vista vemos que no está definida en x = 0. Además vemos que según x se hace mayor el valor de la función decrece, pero nunca cruza el eje de abscisas. Ya conocemos dos puntos de esta gráfica, los dos que nos interesan.

$$g(x) = 5 - x^2$$

Esto es una parábola con forma de 'boca triste' (signo negativo del x^2). Cuyo vértice está en $\frac{d}{dx}x^2 = 0 \rightarrow (0,5)$. También conocemos ya los dos puntos que nos interesan, así que podemos pasar a ilustrar gráficamente el escenario al que nos enfrentamos:



Podríamos calcular el área de las dos zonas pero, como es perfectamente simétrica, calcularemos sólo la de la derecha y multiplicaremos por 2:

$$2\int_1^2 5 - x^2 - \frac{4}{x^2}\,dx \rightarrow$$

$$2 \cdot \left(5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x}\right)\Big|_1^2 = 2\left[\left(5(2) - \frac{(2)^3}{3} + \frac{4}{(2)}\right) - \left(5(1) - \frac{(1)^3}{3} + \frac{4}{(1)}\right)\right] = \mathbf{\frac{4}{3}\ u^2}$$